

۱- دنباله مختلط: دنباله نامتناهی

$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ در اعداد مختلط دارای حد z

است اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

در اینصورت گوئیم که دنباله $\{z_n\}$ به z همگراست

میتوان نشان داد که حد یک دنباله در صورت وجود منحصر بفرد است. اگر دنباله دارای حد نباشد آنرا واگرا می نامیم. قضیه زیر حد دنباله مختلط را به حد دنباله حقیقی مربوط می سازد

قضیه: دنباله $z_n = x_n + iy_n$ دارای حد حقیقی x_n و y_n به x و y همگرا باشد. $z = x + iy$ است اگر و فقط اگر دنباله z_n همگرا باشد.

مثال: اگر $z_n = \frac{n^2+3}{3n^2-2} + i \frac{2n+2}{n-1}$ همگراست

حل: چون دنباله حقیقی $x_n = \frac{n^2+3}{3n^2-2}$ و $y_n = \frac{2n+2}{n-1}$ به ترتیب به $\frac{1}{3}$ و 2 همگرا شده پس z_n به $z = \frac{1}{3} + 2i$ همگراست.

۲- سری های عددی مختلط:

اگر دنباله $\{z_n\}$ مختلط باشد حاصل جمع حد آنرا $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ می نویسیم و آنرا یک سری مختلط می نامیم. به هر n همگرا به عدد S می نامیم اگر دنباله $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ این حاصل جمع ختم به S همگرا باشد یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ در اینصورت می نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

S را مقدار سری می نامند. توجه کنید حد یک دنباله در صورت وجود منحصر بفرد است

بنابراین حد دنباله S_n مقدار سری است. اگر یک سری همگرا باشد واگرا است.

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ که در آن $z_n = x_n + iy_n$ به مقدار $S = S_1 + iS_2$ همگراست اگر و فقط اگر سری حقیقی $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ به ترتیب به S_1 و S_2 همگرا باشد.

مثال: آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^3})$ همگراست. حل: چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگرا شده پس سری مختلط را روشن همگراست.

مثال: آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ همگرایی دارد؟ حل: ضمیمه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ همگرایی دارد.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد در اینصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ را مطلقاً همگرا گویند.
مثابه سری در حقیقت یک سری مطلقاً همگرا، همگرایی دارد.

اگر $z_n = S_n - S_{n-1}$ ، آنگاه اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ همگرا باشد داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

فرضیه: شرط لازم برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ آنست که $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ باشد.

مثال: آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \right)$ همگرایی دارد؟

حل: چنانچه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \right) = 1 \neq 0$ پس طبق قضیه بالا و اگر است زیرا شرط لازم را در همگرایی ندارد.

اگر S مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ باشد آنگاه $R_N = S - S_N$ ، باقی مانده سری است.

توجه کنید چون $|S - S_N| = |R_N|$ بنابراین اگر سری همگرا باشد $S_N \rightarrow S$ آنگاه $R_N \rightarrow 0$ یعنی اگر سری همگرا باشد باقی مانده سری به هر سی میل خواهد کرد.

سری های توانی:

شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ در حوزه R ، همگرایی سری حقیقی

$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(f_n(z))$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(f_n(z))$ در R است. از آنجایی که رئیض ریاضی سری در حقیقت

میان بیانی برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ معتد است و اگر

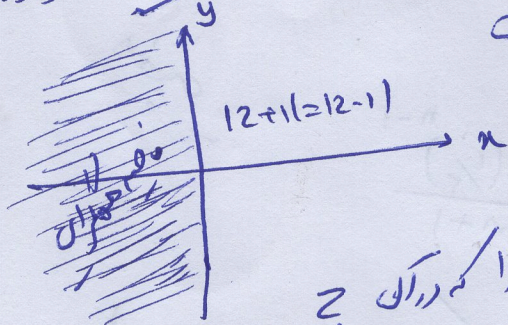
(۳۲) آردن نسبت: سری $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$ همگرایی اگر حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \right| = 1$ باشد. اگر این حد برابر با یک باشد هیچ نتیجه‌ای در مورد رفتار سری حاصل نمی‌شود و باید از سایر آزمون‌ها استفاده کرد.

مثال: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n-1}$ را تعیین کنید.

برای ناحیه همگرایی: $\left| \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n}{\frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n-1}} \right| = \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right| \rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1$

همگرایی در ناحیه $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1$ و اگر $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| > 1$ را تعیین رفته در $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$ مابقی است.

سری همگرایی $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ درین مقدار $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$ یعنی $|z+1| = |z-1|$ همیشه برقرار است پس سری برای محور دایره دایره $|z+1| = |z-1|$ همگرا ولی در سمت راست آن واگرایی.



سری توان: یک سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ را که در آن z_0 یک عدد مختلط، n عدد طبیعی و a_n یک دنباله مختلط است را یک سری توان می‌گویند.

نکته: آردن نسبت سری آن ناحیه همگرایی سری توان را می‌یابیم. اگر $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ باشد و عددی مثبت باشد، اگر $\rho = 0$ ، سری در همه جا همگرا می‌باشد.

اگر $0 < \rho < \infty$ ، سری برای هر z که $|z-z_0| < \rho$ همگرا می‌باشد. اگر $\rho = \infty$ ، فقط در نقطه z_0 همگرا است. $r = \frac{1}{\rho}$ را شعاع همگرایی و دایره $|z-z_0| = r$ را دایره همگرایی، قرص $|z-z_0| < r$ را قرص همگرایی می‌گویند.

مثال: شتاع همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} (z-i)^n$ (با سید)

$$r = \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{n!}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} = \frac{1}{e} < \infty$$

پس دایره همگرایی $|z-i| = \frac{1}{e}$ و دایره همگرایی $|z-i| < \frac{1}{e}$ است

نکته: هر سری توان در دایره همگرایی خود همگرایی دارد و از آن میان همگرایی را می‌توان با استفاده از تست

مثال: فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ یک همگرایی ساده از تست $\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$ در دایره $|z|=1$ باشد.

$$\int_C f(z) dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{1}{e} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1} \right]$$

$$f' \left(\frac{1}{e} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} \Big|_{z=\frac{1}{e}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left(\frac{1}{e} \right)^{n-1}}{n!}$$

سبب تیلور بدایع: فرض کنید $f(z)$ در دایره R از z_0 تا z همگرایی داشته باشد. می‌توان $f(z)$ را در دایره $|z-z_0| < R$ به صورت $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \dots$ بسط تیلور بدایع جانشین کرد.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \dots$$

سبب تیلور بدایع e^z و $\sin z$ در $z=0$ عبارتند از:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

توجه: جدول زیر ربط بین برخی توابع، بسط مکرر را دارد. $z=0$ است

۱) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots$ $r=\infty$ (از بسط $\sin z$ می آید)

۲) $\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ $r=\infty$ (از $\sin z = i \sinh z$ می آید)

۳) $\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$ $r=\infty$ (از $\sinh z$ می آید)

۴) $\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots$ $r=\infty$ (بسط $\sin z$ و $\cos z$)

۵) $\tanh z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \dots$ $r=\infty$ (بسط $\sinh z$ و $\cosh z$)

۶) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ $r=1$ (بسط هندسی)

۷) $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2}z^2 + \dots$ (بسط p عدد صحیح منفی)

مثال: بسط $\frac{1}{1+z^2}$ به یک سری توانی در $z=0$ (تسلی کرده و بسط مکرر هر یک را بدست آوریم)

۱) حل: یک فرمول (۷) بالا را با z قرار دهیم $\frac{1}{1+z^2}$

$\frac{1}{1+z^2} = 1 + (-z^2) + (-z^2)^2 + (-z^2)^3 + (-z^2)^4 + \dots = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots$
بسط مکرر $r=1$ است

۲) $\tan^{-1} z$ بدین $\left(\frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z \right)$ پس از نظر مستقیم از $\frac{1}{1+z^2}$ انتگرال می گیریم

$\tan^{-1} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \dots$

۳) حل: بدین $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ یک فرمول (۷) بالا را با z و $p=-2$ قرار دهیم

$(1+z^2)^{-2} = 1 - 2(z^2) + \frac{-2(-3)}{2}(z^2)^2 + \dots = 1 - 2z^2 + 3z^4 - \dots$

۴) حل: سریان درست $\frac{z}{1+3z^2}$: $\frac{z}{1+3z^2} = z \times \frac{1}{1+3z^2} = \frac{z}{1} \times \frac{1}{1+3z^2}$ حالا یک فرمول (۷) را با z و $p=-\frac{1}{3}$ قرار دهیم

