جزوه درس

ریاضی پیش

تهیه کننده: نعمتی

پاییز ۹۹

ریاضی پیش دانشگاهی

۱- توان و ریشه اعداد حقیقی

توان n ای عدد حقیقی a را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ \text{بار}} \\ a^0 = 1 \end{cases}$$

مثال:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \left(\tfrac{1}{2}\right) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$7^0 = 1$$

$$(-4)^0 = 1$$

هر عدد به توان منفی برابر است با عکس (وارون) همان عدد به توان مثبت

توجه: عکس عدد a می‌شود: $\frac{1}{a}$

$$2^{-3} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \qquad (0/3)^{-4} = \frac{1}{(0/3)^4}$$

تعریف: اگر a عددی مثبت یا صفر ($a \geq 0$) و n عددی طبیعی باشد، آنگاه عدد منحصر به فرد $b \geq 0$ وجود دارد به طوری که $b^n = a$، b را با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهند یعنی اگر $b^n = a$ آنگاه $b = \sqrt[n]{a}$

توجه کنید اگر n زوج باشد حتماً باید $a \geq 0$ باشد یعنی اعداد منفی ریشه n ام زوج ندارند. برای $r = \frac{m}{n} \in Q$ و $(n \in N)$ (Q مجموعه اعداد گویا) و $a \geq 0$ تعریف می‌کنیم

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

توجه کنید اگر n فرد باشد در فرمول بالا a را منفی نیز در نظر گرفت.

مثال ۱:

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad , \quad (17)^0 = 1$$

$$4^{-2} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \qquad 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5}} \quad , \quad (-3)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}$$

ص ۲

روابط مهم

1) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

2) $a^n \div b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

4) $a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{nm}$

6) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

7) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

مثال)

① $10^3 \times 5^3 = (10 \times 5)^3 = 50^3$

② $12^3 \div 3^3 = \left(\dfrac{12}{3}\right)^3 = 4^3$

③ $(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8$

④ $5^6 \times 5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}$

⑤ $4^5 \div 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$

⑥ $a^{23} \times a^{12} = a^{35}$

⑦ $a^{100} \times a^{42} \times a^5 \times a^3 = a^{100+42+5+3} = a^{150}$

⑧ $a^m \times a^m \times a^n \times a^n \times b^{2n} \times b^{2m} = a^{2m+2n} \times b^{2n+2m} = (a \times b)^{2n+2m}$

⑨ $a^{30} \times b^{20} \times a^{10} \times b^{15} \times b^5 = a^{30+10} \times b^{20+15+5} = a^{40} \times b^{40} = (ab)^{40}$

⑩ $\dfrac{a^{13} \div a^7}{a^{23} \div a^5} = \dfrac{a^{13-7}}{a^{23-5}} = \dfrac{a^6}{a^{18}} = a^{6-18} = a^{-12} = \dfrac{1}{a^{12}}$

هر عدد بتوان منفی را با عکس آن عدد بتوان مثبت

⑪ $\dfrac{a^{15} + a^{13}}{a^3 + a} = \dfrac{a^{13}\cancel{(a^2+1)}}{a\cancel{(a^2+1)}} = \dfrac{a^{13}}{a} = a^{12}$

⑫ $\dfrac{a^5 \times b^4 \times c^6}{a^2 \times b^7 \times c^4} = \dfrac{a^3 c^2}{b^3}$?!

⑬ $\dfrac{a^6 \times a^2}{b^{10} \div b^2} = \dfrac{a^8}{b^8} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^8$

$(a^4)^5 \times (b^5)^4 = a^{20} \times b^{20} = (ab)^{20}$

⑭ $(a^2)^3 \times (a^4)^2 \times (b^7)^2 = a^6 \times a^8 \times b^{14} = a^{14} \times b^{14} = (ab)^{14}$

ریاضی پیش دانشگاهی

معادله درجه اول: صورت کلی $ax+b=0$ که b و $a\neq 0$ اعداد حقیقی و x مجهول معادله است. حل:

$$ax+b=0 \to ax=-b \xrightarrow{\text{ضرب}} x=\frac{-b}{a}$$

مثال) $2x+5=0 \xrightarrow{\text{حل}} 2x=-5 \to x=-\frac{5}{2}$

$\frac{1}{5}x-3=0 \xrightarrow{\text{حل}} \frac{1}{5}x=3 \to x=\frac{3}{\frac{1}{5}}=15$

$\frac{2x+7}{2}=\frac{x-1}{3} \xrightarrow{\text{حل}} 3(2x+7)=2(x-1) \Rightarrow 6x+21=2x-2$

$\Rightarrow 4x-2x=2+2 \to 4x=4 \to x=\frac{4}{4}=1$

نکته: اگر حاصلضرب دو عدد صفر باشد باید لااقل یکی از آن‌ها صفر باشد یعنی اگر $ab=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$

مثال) معادله $(5x+1)(3-4x)=0$ را حل کنید

$$(\underbrace{5x+1}_{a})(\underbrace{3-4x}_{b})=0 \to 5x+1=0 \to 5x=-1 \quad x=-\frac{1}{5}$$

یا

$$3-4x=0 \quad 3=4x \to x=\frac{3}{4}$$

معادله توانی: معادله‌ای که مجهول آن در توان باشد معادله توانی نامیده میشود

مثال) معادله توانی $3^x=27$ را حل کنید

$3^x=27 \to 3^x=3^3 \Longrightarrow \boxed{x=3}$ (وقتی پایه‌ها مساوی باشند تساوی برقرار است هرگاه توان‌ها نیز مساوی باشند)

مثال) معادله $3^{2x+1}+9^{x+2}=84$ را حل کنید

$$3^{2x+1}+9^{x+2}=84 \to 3^{2x}\times 3+(3^2)^{x+2}=12\times 7 \Longrightarrow 3^{2x}\times 3+3^{2x+4}=12\times 7$$

$$3^{2x}\times 3+3^{2x}\times 3^4=9\times 7 \Rightarrow (3+3^4)\times 3^{2x}=9\times 7 \Longrightarrow 84\times 3^{2x}=84$$

$$3^{2x}=1=3^0 \Rightarrow 2x=0$$

$$x=0$$

حل) $9^{2x-1} = 81 \times 3^{x} \xrightarrow{\text{حل}} (3^{2})^{2x-1} = 3^{4} \times 3^{x} \Rightarrow 3^{4x-2} = 3^{x+4}$

$\Rightarrow 4x-2 = x+4 \Rightarrow 4x - x = 2+4 \to 3x = 6 \to \boxed{x=2}$

حل)

$4^{x} + 4^{x+1} = 5 \quad 1\times 4^{x} + 4\times 4^{x} = 5 \to (1+4)(4^{x}) = 5 \to 5\times 4^{x} = 5$

$4^{x} = 1 = 4^{0} \Rightarrow x = 0$

حل) $5^{x+2} \times 2^{x} = 0/25 \to 5^{2}\times 5^{x} \times 2^{x} = \frac{25}{100} \Rightarrow 25 \times (5\times 2)^{x} = \frac{25}{100}$

$25 \times 10^{x} = \frac{25}{100} \to 10^{x} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{25}{1}} \Rightarrow 10^{x} = \frac{1}{100} = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

حل) $8 \times 2^{2x^{2}} = 2048 \Rightarrow 2^{2x^{2}} = \frac{2048}{8} = 256 = 2^{8} \quad 2^{2x^{2}} = 2^{8}$

$2x^{2} = 8 \to x^{2} = 4 \Rightarrow x = -2$ یا $x = 2$

حل) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = 32 \xrightarrow{\text{حل}} (2^{-1})^{3-x} = 2^{5} \to 2^{-3+x} = 2^{5} \Rightarrow -3+x = 5$

$x = 8$

حل) $5^{x+2} = 5 \times 7^{x+1} \xrightarrow{\text{حل}} \frac{5^{x+2}}{5^{1}} = 7^{x+1}$

$5^{x+2-1} = 7^{x+1} \to 5^{x+1} = 7^{x+1}$

چون پایه‌ها مختلف ولی توان‌ها مساوی هستند این تساوی زمانی صحیح است که توان‌ها صفر باشند

$x+1 = 0 \to x = -1$

تمرینات زیر را حل کنید: ① به ساده‌ترین صورت درآورید

$(4x^{3})(3x^{5}) = ?$ $\quad \frac{a^{7}}{a^{4}} = ?$ $\quad \frac{8x^{9}}{2x^{4}} = ?$

$(a^{2})^{7} = ?$

$\frac{4}{7} a^{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) bc \times \left(-\frac{2}{5}\right) ab^{2}c = ?$

تمرینات : معادلات توانی زیر را حل کنید

۱) $4^{3x} = 4^{15}$ ۲) $4^{2x+1} = 2^{6}$ ۳) $2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$

اتحادها :

۱) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

۲) $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

۳) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

۴) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۵) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

۶) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

۷) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۸) $(a-b)(a^2+ab+b^2 = a^3-b^3$

۹) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

مثال) با استفاده از اتحادها، حاصل عبارات زیر را بنویسید

۱) $(2x+3y)^2 = ?$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $2x = \overset{\text{فرض کنید}}{a}$, $3y = b \Rightarrow (2x+3y)^2 = 4x^2+9y^2+12xy$ اتحاد ۱

۲) $(2x^2-5)^2 = ?$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $2x = a$, $5 = b \Rightarrow (2x-5)^2 = 4x^2+25-20x$ اتحاد ۲

۳) $(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $a=\sqrt{x}$, $b=2\sqrt{y} \Rightarrow (\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y}) = x-4y$ اتحاد ۳

۴) $(x-\frac{1}{3})^3 = x^3-3(x^2)(\frac{1}{3})+3(x)(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^3 = x^3-x^2+\frac{x}{3}-\frac{1}{27}$ اتحاد ۵

تجزیه : منظور از تجزیه یک عبارت آن است که عبارت داده شده را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم.

مثال) $(x-4)(x+4) = x^2-16$ ، چند جمله‌ای $x-4$ و $x+4$ را عامل‌های تجزیه x^2-16 می‌نامیم یعنی x^2-16 به صورت ضرب عامل‌های $x-4$ و $x+4$ نوشته می‌شود

ص ۶۵

الف) اگر تمام جملات یک چند جمله‌ای دارای عامل مشترک باشند آنگاه با فاکتورگیری، عمل تجزیه را انجام میدهیم (فاکتور = عامل مشترک)

الف) $4a+4b-4c=4(a+b-c)$

ب) $12x^2y^3+4xy^2-8x^2y=4xy(3xy^2+y-2x)$

پ) $a^{3n}+a^{n+2}=a^{3n}+a^n\times a^2=a^n(a^{2n}+a^2)$

ب) گاهی میتوان چند جمله‌ای داده شده را طوری دسته بندی کرد که هر دسته دارای یک عامل مشترک باشند

مثال) عبارت $P=7x-6xy+3x^2-14y$ را تجزیه کنید

$$P=7x-6xy+3x^2-14y=(7x+3x^2)+(-6xy-14y)$$
$$=x(\underbrace{7+3x}_{\text{عامل مشترک}})-2y(7+3x)=(7+3x)(x-2y)$$

مثال) عبارت $P=b^2y-b^2+a^2y-a^2$ را تجزیه کنید

$$P=b^2(y-1)+a^2(y-1)=(y-1)(b^2+a^2)$$

پ) از اتحادها هم میتوان در تجزیه عبارات استفاده کرد.

مثال) عبارت $P=4x^2+12xy+9y^2$ را تجزیه کنید

حل: طبق اتحاد ① $P=4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x+3y)^2$

مثال) عبارت $P=x^2+3x-28$ را تجزیه کنید

حل: با توجه به اتحاد ④ دو عدد چنان تعیین میکنیم که جمع آنها $+3$ و حاصلضربشان -28 شود آن دو عدد $+7$ و -4 هستند

$$P=(x+7)(x-4)$$

مثال) عبارت $P=27x^3+64$ را تجزیه کنید

حل: با توجه به اتحاد ⑦ داریم

$$P=27x^3+64=(3x)^3+(4)^3=(3x+4)(9x^2-12x+16)$$

رادیکال ها

تعریف: منظور از $\sqrt[n]{a}$ که $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ شخص نمودن عددی مانند b است که به تعریف $a=b^n$ (۱)

نماد $\sqrt{}$ را رادیکال و n را فرجه رادیکال گویند. اگر $n=2$ باشد بجای $\sqrt[2]{a}$ می‌نویسیم $\sqrt{a}$.

اگر n زوج باشد باید $a\geq 0$ باشد در اینصورت از رابطه (۱) داریم $a=(\pm b)^n$ مثل $625=(\pm 5)^4$

توجه کنید منظور از $\sqrt[4]{625}$ عدد $+5$ است. و تعریف زیر را داریم

مانند $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$، قوانین: $\sqrt{a^2}=|a|$، $k\in\mathbb{N}$، $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$

$\sqrt{|ab|}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$، $\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

$a\sqrt{|b|}=\begin{cases}\sqrt{a^2|b|} & a>0\\ -\sqrt{a^2|b|} & a<0\end{cases}$، $a>1\Longrightarrow a>\sqrt[n]{a}$ ، $0<a<1\rightarrow a<\sqrt[n]{a}$.

اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a}$ به ازای جمیع مقادیر $a\in\mathbb{R}$ تعریف میشود

اگر n فرد باشد $a<b\Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

اگر n زوج باشد $0<a<b\Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

تعریف: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ که $a>0$ ، $n>1$ ، $m,n\in\mathbb{N}$

قوانین دیگر:

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mk]{a^{nk}},\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

مثال)

$$\sqrt[4]{8^3}=8^{\frac{3}{4}}=(2^3)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{9}{4}}\ \ /\ \ \sqrt[3]{16^2}=16^{\frac{2}{3}}=(2^4)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{8}{3}}$$

$$\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3},\quad \sqrt[10]{3^5}=\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$$

اگر n زوج و $a>0$ باشد $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ / اگر n فرد باشد رابطه برای هر $a\in\mathbb{R}$ برقرار است

مثال)

$$5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5^3\times 2}=\sqrt[3]{125\times 2}=\sqrt[3]{250}\ \ /\ \ -4\sqrt{3}=-\sqrt{4^2\times 3}=-\sqrt{48}$$

$$-4\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-4)^3(5)}=\sqrt[3]{-320}\ \ |\ \ \sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{5^3\times 2}}=\sqrt[6]{5^3\times 2}=\sqrt[6]{125\times 2}=\sqrt[6]{250}$$

اعمال جبری روی رادیکال ها :

۱- جمع و تفریق رادیکال ها : این عمل زمانی امکان پذیر است که فرجه رادیکال ها مساوی و اعداد زیر رادیکال ها نیز یکسان باشند.

$$4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (4-3+1-5)\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

۲- ضرب و تقسیم رادیکال ها : این عمل وقتی امکان پذیر است که فرجه آنها مساوی باشد اگر فرجه مساوی نباشد کوچکترین مضرب مشترک بین فرجه ها را بعنوان فرجه مشترک انتخاب کنید. بعنوان مثال

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} \quad , \quad \sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6} \quad , \quad \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$$

۳- در ضرب چند رادیکال ، اگر فرجه ها یکسان نباشد ابتدا فرجه مشترک را تعیین کرده و پس رادیکال های مساوی آن را می نویسیم، در هم ضرب می کنیم ، حاصلضرب عبارتست از رادیکالی با فرجه مشترک است

$$\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3\times4\times2} = \sqrt[5]{24}$$

$$\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\frac{12}{3}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3\times2]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{5} \times \sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{4^4} \times \sqrt[12]{5^3} \times \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{4^4\times5^3\times7^2}$$

توجه: ک.م.م $(3,4,6) = 12$

$$\sqrt[6]{8} \div \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{8^2} : \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{\frac{8^2}{5^3}}$$

ریشه گیری از یک رادیکال : ریشه n ام $\sqrt[m]{a}$ عبارتست از

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال) ریشه سوم عبارت $\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}$ را بیابید

حل: $$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[3\times5\times4]{2} = \sqrt[60]{2}$$

مثال) حاصل عبارت $\sqrt[3]{4\sqrt{3}}$ را بدست آورید.

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2\times3}} = \sqrt[3\times2]{4^2\times3} = \sqrt[6]{16\times3} = \sqrt[6]{48}$$

توجه: ابتدا ضریب رادیکال داخلی یعنی ۴ را به توان فرجه رادیکال داخلی خودش رساند و داخل رادیکال می نویسید.

95

گویا کردن مخرج کسرها: منظور از گویا کردن مخرج یک کسر این است که کسری بدست آوریم که در مخرج رادیکال نباشد.

الف) اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[m]{a^n}$ باشد صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{a^{n-m}}$ ضرب کنید.

ب) اگر مخرج کسر به صورت $a \pm \sqrt{b}$ باشد صورت و مخرج را در $a \mp \sqrt{b}$ ضرب کنید.

ج) اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ باشد صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ضرب کنید.

د) اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ یا $a \pm \sqrt[3]{b}$ باشد از اتحاد $a^3 \pm b^3 = (a^2 \mp ab + b^2)$ استفاده کنید.

مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

1) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 2^2}}{\sqrt[3]{2 \times 2^2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3})}{(2 + 3\sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3})}{4 - 27} = \frac{2\sqrt{3} - 9}{-23}$

4) $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{2(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})} = \frac{2(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{3 - 2 = 1}$

تجزیه رادیکال‌های مرکب: تعریف: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ را رادیکال مرکب نامند.

رادیکال $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ را با فرض $b > 0$ و $a \pm \sqrt{b} > 0$ وقتی می‌توان به صورت مجموع دو رادیکال ساده تبدیل نمود که $a^2 - b$ مربع کامل باشد یعنی $a^2 - b = k^2$ داریم:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+k}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-k}{2}}$$

مثال) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ را بشکل دو رادیکال ساده بنویسید.

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 + \sqrt{2^2 \times 3}} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} \quad a = 4,\ b = 12 \quad a^2 - b = 16 - 12 = 4 = 2^2 \quad \boxed{k = 2}$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1$$

مثال:

حاصل عبارت $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ را بیابید

حل: $\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow a=2\ ,\ b=3 \quad a^2-b=4-3=1=k^2 \rightarrow k=1$

پس $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a^2-b=1=k^2 \rightarrow k=1 \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

پس $A = (\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}) - (\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

قوانین شمارش: ① اصل ضرب: اگر انتخابی را بتوان به m طریق انجام داد و به ازای هر کدام از این m طریق، انتخاب دیگر را به n طریق متفاوت بتوان انجام داد، این دو عمل انتخاب با هم به $m \times n$ طریق انجام پذیر است.

مثال) فرض کنید از تهران به قزوین ۲ جاده و از قزوین به تبریز ۳ جاده وجود داشته باشد مسافری قصد رفتن از تهران به تبریز به واسطه شهر قزوین را دارد او چند راه مختلف را میتواند برای سفرش انتخاب کند

حل: $2 \times 3 = 6$

تذکر: اصل ضرب قابل تعمیم نیز می باشد.

مثال) با حروف کلمه «تهران» چند کلمه چهار حرفی میتوان نوشت اگر تکرار حروف

الف) جایز باشد ب) جایز نباشد

ب) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

مثال) با ارقام ۳، ۲، ۱ چند عدد دو رقمی میتوان نوشت به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد

حل: انتخاب رقم دهگان به ۳ طریق و انتخاب رقم یکان به ۲ طریق است پس طبق اصل ضرب داریم

$3 \times 2 = 6$

مثال: با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۰ و ۶ چند عدد سه رقمی البته که تکرار ارقام مجاز نباشد میتوان نوشت؟

حل: چون صفر نمیتواند رقم صدگان باشد پس صدگان را به چهار طریق میتوان انتخاب کرد حالا برای انتخاب رقم دهگان با احتساب رقم صفر چهار حالت باقی می ماند و برای رقم یکان ۳ انتخاب. در نتیجه داریم

$4 \times 4 \times 3 = 48$

تبدیل (جایگشت): یک حالت از قرار گرفتن تمام عناصر متمایز یک مجموعه را در یک ردیف جایگشت گویند و آن را با P_n نشان میدهیم.

فاکتوریل: حاصلضرب تمام اعداد صحیح مثبت از 1 تا n را با نماد $n!$ نمایش میدهیم و آن را n فاکتوریل گویند یعنی

$$n! = 1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$$

قرارداد $\begin{cases} 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $P_n = n!$

نکته: $(n+1)! = (n+1)\,n!$ مثال) $8! = 8\times7!$ $\quad 12! = 12\times11\times10!$

مثال) عبارات زیر را ساده کنید

$$\frac{5!}{3!}, \quad \frac{7!}{3!\times5!}, \quad \frac{8!}{3!\times5!}$$

حل: $\frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20 \qquad \frac{7!}{3!\,5!} = \frac{7\times6\times\cancel{5!}}{3\times2\times1\times\cancel{5!}} = 7$

$$\frac{8!}{3!\times5!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{3!\times\cancel{5!}} = 56$$

مثال) ۶ نفر به چند طریق میتوانند در یک صف کنار هم قرار بگیرند

$$P_6 = 6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$

ترتیب: فرض کنید n شیء متمایز داریم و میخواهیم r تا از آنها را کنار هم قرار دهیم $(r\leq n)$ به چند طریق این عمل را میتوان انجام داد؟ برای این کار r محل را در نظر میگیریم در محل اول n شیء و در محل دوم $(n-1)$ شیء و در محل سوم $(n-2)$ شیء و ... و در محل r ام $(n-r+1)$ شیء قرار میگیرند که طبق اصل ضرب:

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال) به چند طریق میتوان از بین ۶ نفر، ۴ نفر را انتخاب نمود بطوریکه نفر اول مسئول گروه، نفر دوم معاون و نفر سوم منشی و نفر چهارم حسابدار باشند

$n=6,\ r=4$

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}} = 360$$

مثال ۱) از یک گروه ۱۰ نفره به چند طریق میتوان گروه‌های ۴ نفر انتخاب کرد که هر یک سمت مشخص داشته باشند.

$$P(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=\frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}}=5040$$

مثال ۲) از تساوی زیر مقدار n را بیابید.

$$6P(n,4)=P(n,6)$$

حل:

$$6\times\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{n!}{(n-6)!}\Rightarrow\frac{6}{(n-4)!}=\frac{1}{(n-6)!}$$

$$6(n-6)!=(n-4)!\Rightarrow6\cancel{(n-6)!}=(n-4)(n-5)\cancel{(n-6)!}$$

$$6=n^2-9n+20\Rightarrow n^2-9n+14=0\quad(n-2)(n-7)=0\ \begin{cases}n=2\\ n=7\end{cases}$$

قبول

ترکیب: به مثال ۱ بالای صفحه توجه کنید در آنجا یک گروه ۶ نفره داشتیم، میخواستیم یک گروه چهار نفره انتخاب کنیم در اینجا مهم بود که چه شخصی اول انتخاب بشود چون او مسئول گروه بود و بهمین طور مهم بود که نفر دوم چه کسی باشد زیرا معاون بود و ... . اما اگر فقط بخواهیم از میان ۶ نفر یک گروه ۴ نفره انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نباشد این عمل را ترکیب می‌نامند.

پس: اگر در انتخاب r شیء از n شیء متمایز ($r\leq n$) ترتیب آنها مهم نباشد این انتخاب را ترکیب نامند و آنرا با نماد $\binom{n}{r}$ یا $C(n,r)$ نمایش میدهیم

$$\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

مثال) به چند طریق میتوان از میان ۱۰ نفر، دو نفر را انتخاب کرد؟

$$C(10,2)=\frac{10!}{2!\,8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{2\times\cancel{8!}}=45$$

مثال) به چند طریق میتوان از میان کیسه‌ای که دارای ۶ گوی سفید و ۴ گوی سیاه است ۳ گوی باهم انتخاب کرد:

کل گوی‌ها $6+4=10$

$$C(10,3)=\frac{10!}{3!\,7!}=120$$

مثال) از بین ۷ دانشجو و ۶ استاد به چند طریق میتوان یک کمیته مرکب از ۳ استاد و ۲ دانشجو انتخاب نمود. حل: انتخاب استاد $\binom{6}{3}$ و انتخاب دانشجو $\binom{7}{2}$ طریق امکان پذیر است که طبق اصل ضرب پاسخ

$$\binom{6}{3}\times\binom{7}{2}=420$$

درجه: تعداد ترتیب‌های n شیء مختلف که n_1 شیء آن از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... n_r شیء آن از نوع rام باشد برابر است با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_r!}$$

توجه کنید که $n_1+n_2+\cdots+n_r = n$

مثال) به چند طریق مختلف می‌توان ۳ توپ قرمز، ۲ توپ آبی، ۴ توپ زرد را کنار هم قرار داد (توپ‌های هم رنگ قابل تشخیص نیستند)

$$3+2+4=9 \rightarrow \binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3! \times 2! \times 4!} = 1260$$

مثال) به چند طریق می‌توان ۱۲ زندانی را در ۴ سلول با ظرفیت‌های ۳، ۴، ۳، ۲ نفر جای داد.

$$3+3+4+2=12 \quad \binom{12}{2,4,3,3} = \frac{12!}{2! \times 4! \times 3! \times 3!} = 277200$$

بسط دو جمله‌ای نیوتن: با استفاده از آنالیز ترکیبی:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

مثلاً برای $(a+b)^2$ داریم $n=2$ پس

$$(a+b)^2 = \sum_{r=0}^{2} \binom{2}{r} a^{2-r} b^r = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2+2ab+b^2$$

کافی است به r از صفر تا ۲ مقدار دهید و نتایج را با هم جمع کنید. $r=0$ توجه کنید منظور از $\binom{n}{r}$ عبارت است از

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال)

$$(a+b)^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} a^{4-r} b^r = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

با توجه به فرمول بسط دو جمله‌ای نیوتن ضریب جمله $(r+1)$ام برابر $\binom{n}{r}$ است

به طور مثال ضریب جمله پنجم برابر $\binom{n}{4}$ است

مثال) بسط $(1+x)^n$ را بنویسید

حل: $a=1$ ، $b=x$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

مثال) ضریب جمله پنجم در بسط $(1+x)^8$ را بنویسید

$$\text{ضریب جمله پنجم} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

مثال) بسط $(2x+3y)^4$ را بنویسید. حل: $a=2x$ ، $b=3y$ ، $n=4$

$$(2x+3y)^4=\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}(2x)^{4-r}\cdot b^r=16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4$$

نکته جالب!:

$$16+96+216+216+81=625=(2+3)^4=5^4$$

یعنی برای بدست آوردن مجموع ضرائب کافی است ضریب x یعنی ۲ و ضریب y یعنی ۳ جمع کرده، بتوان ۴ برسانیم.

قضیه: در بسط $(ax+by)^n$ مجموع ضرائب بسط $(a+b)^n$ است.

قضیه: اگر $n_1+n_2=n$ باشد داریم:

$$\binom{n}{n_1}=\binom{n}{n_2}$$

مثال) ضریب جمله x^3y^6 در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^9$ چیست؟

$$\overset{n_1}{3}+\overset{n_2}{6}=9$$

$$r=6\ ,\ 9-r=3\Rightarrow\binom{9}{6}=84$$

مثال) ضریب جمله y^6 در بسط دوجمله‌ای $(2x+y^2)^9$ چیست.

حل: جمله‌ای که شامل y^6 باشد میشود $x^6(y^2)^3$ است زیرا $6+3=9$ و بنابراین

$$\binom{9}{3}(2x)^6(y^2)^3=5376x^6y^6$$

مثال) در بسط $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$ ضریب جمله x^2 را پیدا کنید.

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}=\sum_{r=0}^{20}\binom{20}{r}(\sqrt{x})^{20-r}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=\sum_{r=0}^{20}\binom{20}{r}(\sqrt{x})^{20-2r}$$

عبارت $(\sqrt{x})^{20-2r}$ باید برابر x^2 باشد یعنی

$$(\sqrt{x})^{20-2r}=x^2\Rightarrow\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{20-2r}=x^{10-r}=x^2\Rightarrow10-r=2\quad r=8$$

$$\text{ضریب } x^2=\binom{20}{8}=\frac{20!}{8!\times12!}$$

مثال) در بسط $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ ضریب جمله x^2 چیست

$$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8=\sum_{r=0}^{8}\binom{8}{r}(x)^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\sum_{r=0}^{8}\binom{8}{r}x^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{-\frac{r}{2}}$$

$$=\sum_{r=0}^{8}\binom{8}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r x^{8-\frac{3}{2}r}=\dots\times x^2\Rightarrow8-\frac{3}{2}r=2\Rightarrow r=4\quad \text{ضریب}=\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{8}$$

تمرینات: ضریب جمله x^5y^7 در بسط $(x+y)^{12}$ را بیابید	ج: ۷۹۲

ضریب جمله x^8y^3 در بسط $(x+y)^{11}$ را بیابید	ج: ۱۶۵

لگاریتم: فرض کنید a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و عددی حقیقی در این صورت عددی مانند y وجود دارد که $y=a^x$. توجه کنید که همواره $y>0$ می‌باشد.
در چنین حالتی x را لگاریتم عدد y در پایه a گویند و می‌نویسیم $x=\log_a y$

پس:

$$\boxed{y=a^x \Longleftrightarrow \log_a y = x}$$

مثال) $10^2=100 \longrightarrow \log_{10}100=2$

$0.01=10^{-2} \longrightarrow \log_{10}0.01=-2$	$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

خواص لگاریتم: ۱) لگاریتم هر عدد در پایه خودش برابر ۱ است	$\log_a a=1$

۲) لگاریتم صفر در هر پایه‌ای تعریف نشده است

۳) لگاریتم اعداد منفی وجود ندارد

۴) لگاریتم عدد ۱ در هر پایه‌ای صفر است	$\log_a 1=0$

۵) $\log_a x^m = m\log_a x$	۶) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

۷) $A>B \longrightarrow \log_a A > \log_a B$ به شرطی که $a>1$ باشد

۸) $A>B \longrightarrow \log_a A < \log_a B$ به شرطی که $0<a<1$ باشد

۹) $A=B \Longleftrightarrow \log_a A = \log_a B$

۱۰) $a>1 \xrightarrow{0<x<1} \log_a x<0$

۱۱) $0<a<1 \xrightarrow{0<x<1} \log_a x>0$

مثال) $\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3\log_{10}10=3(1)=3$

خواص مهم دیگر لگاریتم :

۱) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ، $0 < a \neq 1$ ، $x,y > 0$

۲) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ، ۳) $\log_a x \times \log_x a = 1$

۴) $\log_a x \times \log_b a = \log_b x$ ، ۵) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

۶) $a^{(\log_a x)} = x$ ، ۷) $\log_d \log_c \log_b \log_a x = \alpha \Rightarrow x = a^{b^{c^{d}}}$

۸) $\log_a x = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x^n = a^m$

تذکر: اگر مبنای لگاریتم نمی $a=10$ باشد قرار داد می‌کنیم ۱۰ را ننویسیم $\log_{10} x = \log x$

مثال) اگر $\log 2 = /3010$ و $\log 3 = /4771$ باشد مطلوب است $\log 6$

حل $\log 6 = \log 3 \times 2 = \log 3 + \log 2 = /4771 + /3010 = /7781$

مثال ۲) اگر $\log 2 = /3010$ باشد مقدار $\log 5$ را بیابید

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - /3010 = /6990$

مثال) حاصل $\log \sqrt[3]{100}$ را بیابید (توجه: پایه همان ۱۰ است)

$\log \sqrt[3]{100} = \log \sqrt[3]{10^2} = \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log 10 = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$

مثال) حاصل $\log_{64} \frac{1}{8}$ را بیابید

$\log_{64} \frac{1}{8} = \log_{2^6} \frac{1}{2^3} = \log_{2^6} 2^{-3} = (-3)(\frac{1}{6})\log_2 2 = (-3)(\frac{1}{6})(1) = -\frac{1}{2}$

مثال) حاصل $A = \log_4 \sqrt{2} + \log_9 \sqrt{3}$ را بیابید

$A = \log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}} + \log_{3^2} 3^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\log_2 2 + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\log_3 3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال) $A = \log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = ?$

$A = \log_8 \sqrt{2} - \log_8 4 = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} - \log_{2^3} 2^2 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{3})\log_2 2 - (2)(\frac{1}{3})\log_2 2$

$A = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

۱۰

فصل ۱۰

جبر ماتریس، دترمینان و معکوس ماتریس

۱.۱۰ ماتریس

فرض کنید شرکتی سه نوع کالا تولید می‌کند (کالای نوع اول، نوع دوم و نوع سوم) و همچنین فرض کنید که در سال‌های ۱۳۷۲ از نوع اول ۱۰۰۰ عدد از نوع دوم ۲۰۰ عدد و از نوع سوم ۳۰۰ عدد تولید کرده باشد. در سال ۱۳۷۳ از نوع اول ۷۰۰ عدد و از نوع دوم ۲۰۰ عدد و از نوع سوم هم ۵۰ عدد تولید کرده است. حال اطلاعات بالا را می‌توانیم به فرم زیر خلاصه کنیم

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{نوع اول} & \text{نوع دوم} & \text{نوع سوم} \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱۳۷۲ \\ ۱۳۷۳ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} ۱۰۰۰ & ۲۰۰ & ۳۰۰ \\ ۷۰۰ & ۲۰۰ & ۵۰ \end{array}\right] \end{array}$$

حال اگر تولید کالای نوع دوم در سال ۱۳۷۳ را بخواهیم، کافی است که دو خط رسم کنیم یکی افقی که از سال ۱۳۷۳ رسم شود و دیگری عمودی که از نوع دوم رسم می‌شود. عددی که در محل تلاقی این دو خط قرار می‌گیرد، تولید کالای نوع دوم در سال ۱۳۷۳ را نشان می‌دهد. این جدول را یک **ماتریس** می‌نامیم و معمولاً آن را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم.

$$[\ \ ] \qquad (\ \ )$$

تعریف (۱۰.۱): هر گاه $m \times n$ عدد یا تابع (یک یا چند متغیره) را در m سطر و n ستون قرار دهیم، آرایش حاصل را یک **ماتریس** می‌نامیم.

ماتریس را با حرف بزرگ لاتین مانند A و B و ... نشان می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A را به طور خلاصه به فرم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یا $A=(a_{ij})_{m\times n}$ نیز نمایش می‌دهیم، a_{ij} نشان دهنده عضو واقع در محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام می‌باشد. **ماتریس** $A_{m\times n}$ را ماتریس **مرتبه** $m\times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ **یک ماتریس مرتبه** ۲×۳ می‌باشد.

عضوهایی که روی یک خط افقی قرار دارند، تشکیل یک سطر از ماتریس A را می‌دهند و **عضوهایی** که روی یک خط قائم قرار دارند، تشکیل یک ستون از ماتریس A را می‌دهند. **مثلاً در** ماتریس بالا، عضوهای ۴ ۲ ۱ تشکیل سطر اول و عضوهای ۱ ۷ ۰ سطر **دوم ماتریس** A را تشکیل می‌دهند. همچنین $\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}$ ستون اول و $\begin{matrix}۲\\۷\end{matrix}$ ستون دوم و $\begin{matrix}۴\\۱\end{matrix}$ **ستون سوم ماتریس** A می‌باشند.

ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد، آن را ماتریس سطری می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}_{۱\times ۵}$$

ماتریس صفر: هرگاه تمام اعضای ماتریس $A_{m\times n}$ برابر عدد صفر باشند، آن را ماتریس صفر نامیده و با O نشان می‌دهیم.

ماتریس مربع: هرگاه در ماتریس A، تعداد سطرها و ستونها برابر باشند، ماتریس را مربع می‌نامیم و ماتریس مربع $A_{n\times n}$ را از مرتبه n می‌خوانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

توجه: ماتریس مربع A، دارای دو قطر می‌باشد، قطری که اعضای آن $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}$ هستند را **قطر اصلی** می‌نامیم.

ماتریس قطری: هرگاه در ماتریس مربع A، تمام اعضای خارج از قطر اصلی، برابر صفر باشند، ماتریس را قطری می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

ماتریس یکه (واحد): هرگاه در ماتریس قطری A، تمام اعضای روی قطر اصلی برابر ۱ باشند، ماتریس را یکه نامیده و آن را با حرف I_n نشان می‌دهیم.

$$I_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس مثلثی: هرگاه در ماتریس مربع A، تمام اعضای بالای (پایین) قطر اصلی برابر صفر باشند، ماتریس را مثلثی پایینی (بالایی) می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$ (ماتریس مثلثی پایینی)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$ (ماتریس مثلثی بالایی)

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ را مساوی گوییم هرگاه اعضای متناظر آن، با هم مساوی باشند. مثلاً اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آنگاه:

$$\boxed{A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad \forall(i,j) \qquad (۱)}$$

مثال ۱: اگر $\begin{pmatrix} a & ۲a+b \\ a+c & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}$، مقادیر a، b، c و d را پیدا کنید.

حل: با توجه به فرمول (۱) داریم

$$۴=a \;\; , \;\; ۲=۲a+b \Rightarrow ۲=۴+b \Rightarrow b=-۲$$
$$۳=a+c \Rightarrow ۳=۴+c \Rightarrow c=-۱$$
$$-۱=a+d \Rightarrow -۱=۴+d \Rightarrow d=-۵ \;\; \square$$

ترانسپوزه (ترانهاده) یک ماتریس: هرگاه جای سطرها و ستونهای نظیر ماتریس A را عوض کنیم، ماتریس حاصل را ترانسپوزه ماتریس A نامیده و آن را بانماد A^T یا A' نشان می‌دهیم. بنابراین اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، A^T یک ماتریس $n\times m$ می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad A^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس متقارن: ماتریس مربع A را متقارن می‌گوییم، هرگاه باشد $A=A^T$ به عبارت دیگر:

$$\forall(i,j) \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

مثال ۲: ماتریس A، متقارن است زیرا $A=A^T$ می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ & -۲ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ & -۲ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه متقارن (پاد متقارن): ماتریس مربع A را شبه متقارن نامیم، اگر $A=-A^T$ باشد، به عبارت دیگر:

$$\forall(i,j) \quad a_{ij}=-a_{ji}$$

با توجه به تعریف باید داشته باشیم $a_{ii}=0$، یعنی باید تمام اعضای روی قطر اصلی برابر صفر باشند.

مثال ۳: ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ شبه متقارن است زیرا، $A=-A^T$

$$A^T=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^T=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}=A \quad \square$$

جمع دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ باشند، جمع دو ماتریس A و B که با نماد $A+B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از ماتریس $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ به طوری که:

$$\boxed{A+B=C \quad , \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (2)}$$

بنابراین شرط آنکه بتوان دو ماتریس را با هم جمع کرد، آن است که تعداد سطرها و ستون‌های آنها برابر باشند.

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، مطلوبست $A+B$:

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \square$$

ضرب عدد در ماتریس: اگر $r\in R$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مفروض باشند، آنگاه:

$$rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال ۵: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، مطلوب است ماتریس $۳A$:

حل:
$$۳A=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱۲ \\ ۶ & -۳ & ۹ \end{bmatrix} \quad \square$$

خواص جمع ماتریس‌ها:

۱) (خاصیت جابجایی) $$A+B=B+A$$

۲) (خاصیت شرکت پذیری) $$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۳) (خاصیت حذف) $$A+B=A+C \Rightarrow B=C$$

۴) (عضو بی‌اثر) $$A+O=O+A=A$$

۵) $$r(A+B)=rA+rB$$

توجه: هر ماتریس مربع A را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس شبه متقارن نوشت:

$$\boxed{R=\frac{۱}{۲}(A+A^T) \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}(A-A^T) \qquad (۳)}$$

R و S به ترتیب ماتریس‌های متقارن و شبه متقارن می‌باشند و

$$A=R+S$$

مثال ۶: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، مطلوبست محاسبه

الف) $A-۳B$ ب) $۵A+۲B-C$

حل: الف)
$$A-۳B=A+(-۳B)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & +۳ \\ -۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲-۳ & ۰+۳ \\ ۱-۶ & -۴-۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

ب)
$$۵A+۲B-C=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۵ & -۲۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۰+۲+۲ & ۰-۲-۱ \\ ۵+۴-۰ & -۲۰+۶-۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & -۳ \\ ۹ & -۱۷ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال ۷: نشان دهید $-(-A) = A$

حل: فرض کنید $A = [a_{ij}]$.

$$-A = -[a_{ij}] = [-a_{ij}] \ , \ -(-A) = -[-a_{ij}] = [a_{ij}] = A \quad \square$$

مثال ۸: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۷ & -۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را به فرم مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس شبه متقارن نشان دهید.

حل: با توجه به فرمول (۳) داریم:

$$R = \frac{۱}{۲}(A + A^T) = \frac{۱}{۲}\left\{ \begin{bmatrix} ۷ & -۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱۴ & -۷ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & -\frac{۷}{۲} \\ -\frac{۷}{۲} & ۳ \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{۱}{۲}(A - A^T) = \frac{۱}{۲}\left\{ \begin{bmatrix} ۷ & -۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$A = R + S \quad \square$$

ضرب دو ماتریس:

اگر $A = (a_{ij})_{m\times p}$ و $B = (b_{ij})_{p\times n}$ حاصلضرب $A \times B$ یا AB ماتریسی است مانند $C = (c_{ij})_{m\times n}$ به طوری که

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

به عبارت دیگر برای تعیین c_{ij} باید عضوهای سطر i ام ماتریس A را در عضوهای نظیر ستون j ام ماتریس B ضرب نموده و سپس آنها را با هم جمع کرد.

توجه: هنگامی ضرب دو ماتریس A و B تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد.

مثال ۹: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است $A \times B$

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ \times ۲ + ۲(-۱) + ۴ \times ۴ & ۱ \times ۰ + ۲ \times ۳ + ۴ \times ۱ \\ -۱ \times ۲ + ۰ \times (-۱) + ۳ \times ۴ & -۱ \times ۰ + ۰ \times ۳ + ۳ \times ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۶ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad \square$$

توجه: در مثال بالا، $B \times A$ نیز قابل تعریف می‌باشد، زیرا تعداد ستونهای ماتریس B برابر با تعداد سطرهای ماتریس A است.

خواص ضرب ماتریس‌ها:

۱) ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی نیست. زیرا اگر AB قابل تعریف باشد، ممکن است BA تعریف نشود، و یا اگر قابل تعریف هم باشد ممکن است برابر نباشند

مثال ۱۰: $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$$

۲) (خاصیت شرکت پذیری) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

۳) (خاصیت توزیع پذیری) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

۳) خاصیت حذف برقرار نیست $A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C$

۴) (عضو بی‌اثر) $A \times I = I \times A = A$

۵) $(rs)A = r(sA) = s(rA) \quad \forall r, s, \in R$

۶) $A \times B = O \not\Rightarrow A = O$ یا $B = O$

توجه: $A^{۲} = A \times A\ ,\ A^{۳} = A^{۲} \times A\ ,\ \dots$

مثال ۱۱: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید.

$$AB = O$$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱+۱ & ۱-۱ \\ -۲+۲ & ۲-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

توجه: در مثال بالا $AB = O$، در حالی که $A \neq O$ و $B \neq O$ است.

مثال ۱۲: اگر A و B و C به صورت زیر تعریف شده باشند، نشان دهید $AB = AC$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۳ \\ ۴ & -۳ & -۱ \end{bmatrix} ,\ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} ,$$

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & -۲ & -۱ & -۱ \\ ۲ & -۵ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۳ \\ ۴ & -۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۳ & -۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱۵ & ۰ & -۵ \\ -۳ & ۱۵ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۳ \\ ۴ & -۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & -۲ & -۱ & -۱ \\ ۲ & -۵ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & -۳ & ۰ & ۱ \\ .۱ & ۱۵ & ۰ & -۵ \\ -۳ & ۱۵ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

توجه: در مثال بالا، نشان دادیم که $AB = AC$ ولی B مخالف C است.

روابط مهم مربوط به ترانسپوزه یک ماتریس

۱) $(A^T)^T = A$

۲) $(A+B)^T = A^T + B^T$

۳) $(AB)^T = B^T A^T$

مثال ۱۳: حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۲ + ۴ - ۱ = ۵ \quad \square$$

مثال ۱۴: از حاصل ضرب زیر، مقدار $x+y$ را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x = ۱۰ \ , \ y = ۱ \Rightarrow x + y = ۱۱ \quad \square$$

مثال ۱۵: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، ماتریس $A^۲$ را محاسبه کنید

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال ۱۶: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر ماتریس $A^۲$ را محاسبه کنید.

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع عناصر } A^۲ = ۵ + ۴ + ۴ + ۵ = ۱۸ \quad \square$$

مثال ۱۷: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر روی قطر ماتریس $A^۲$ را محاسبه کنید.

حل:
$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

$\square$ ۲۹ $=$ ۲۲ $+$ ۷ $=$ مجموع عناصر روی قطر

مثال ۱۸: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، جزء سطر دوم در ستون سوم ماتریس $A^۲$ را پیدا کنید.

حل: کافی است که سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم آن، متناظراً ضرب و نتایج را جمع کنیم.

$$[۰ \quad ۱ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}=۰-۱-۳=-۴ \quad \square$$

مثال ۱۹: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۲$ را محاسبه کنید.

حل:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال ۲۰: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر روی قطر AB را محاسبه کنید.

حل:
$$A\cdot B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$\square$ ۱۳ $=$ ۱۴ $+$ ۱ $-$ $=$ مجموع عناصر روی قطر

ث) $A(CB)$ جواب: $\begin{bmatrix} -۱۱۰ & ۱۴ \\ -۷۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$

ج) نشان دهید $(AB)^T = B^T A^T$

چ) $A^۲$ جواب:

۶ـ اگر $A = \begin{pmatrix} ۴ & ۶ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$، هرکدام از عبارات زیر که تعریف می‌شوند را محاسبه کنید.

الف) AB جواب: $\begin{pmatrix} ۹ & ۲۰ \\ ۴ & ۱۶ \\ -۳ & ۱۲ \end{pmatrix}$

ب) BA جواب: تعریف نمی‌شود.

پ) $A^T B$ جواب: $\begin{pmatrix} ۷ & ۲۱ \\ ۱۴ & ۲۰ \\ -۷ & ۸ \end{pmatrix}$

ت) $B^T A$ جواب: $\begin{pmatrix} ۷ & ۱۴ & -۷ \\ ۲۱ & ۲۰ & ۸ \end{pmatrix}$

ث) $A^۲$ جواب: $\begin{pmatrix} ۳۳ & ۲۶ & -۳ \\ ۱۴ & ۱۴ & ۷ \\ ۳ & -۴ & ۲۰ \end{pmatrix}$

ج) $B^۲$ جواب: تعریف نمی‌شود.

ح) نشان دهید $(A^T)^T = A$

۲.۱۰ دترمینان

تعریف (۱۰.۲): اگر تعداد $n^۲$ عدد را در یک آرایش مربع شکل که دارای n سطر و n ستون باشد بچینیم و دو خط قائم در اطراف آن بکشیم، آرایش حاصل را یک دترمینان مرتبه n می‌نامیم، مانند

$$D = \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} \quad , \quad D = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۴ \\ -۱ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$$

تعریف (۱۰.۳): دترمینان تابعی است که از مجموعه ماتریس‌های $M_{n\times n}$ به R تعریف می‌شود، به عبارت دیگر، دترمینان تابعی است که به هر ماتریس مربع، یک عدد رانسبت می‌دهد.

$$det : M_{n\times n} \to R$$

دترمینان کهاد $(Minor)$ و همسازه $Cofactor$

اگر در یک دترمینان مرتبه n، سطر و ستون مربوط به عضو a_{ij} را حذف کنیم، دترمینان حاصل که از مرتبه $n-1$ می‌باشد را دترمینان کهاد مربوط به عضو a_{ij} می‌نامیم. اگر به **دترمینان کهاد** مربوط به عضو a_{ij}، علامت $(-1)^{i+j}$ را نسبت دهیم، **همسازه‌های** دترمینان به دست می‌آید.

$$\text{همسازه} = (-1)^{i+j}\,(\text{دترمینان کهاد})$$

روش محاسبه مقدار دترمینان

دترمینان را نسبت به یک سطر یا یک ستون آن، بسط می‌دهیم. مثلاً دترمینان زیر را نسبت به سطر اول بسط داده‌ایم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+4}a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

به این ترتیب، چهار دترمینان مرتبه ۳ به دست می‌آوریم و به همین روش هر یک از دترمینان‌های مرتبه ۳ را می‌توان نسبت به یک سطر یا یک ستون بسط داد و برای هر کدام سه دترمینان مرتبه دو به دست آورد.

توجه: اگر دترمینان را نسبت به سطر اول یا ستون اول بسط دهیم، علامت جمله اول مثبت و مابقی به طور متناوب یکی در میان مثبت و منفی می‌باشند.

تعریف (۱۰.۴): دترمینان وابسته به ماتریس مرتبه دو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc} \qquad (۴)$$

مثال ۲۴: الف) $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۴ - ۳ = -۷$

ب) $\begin{vmatrix} ۰ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ - (-۴) = ۴ \quad \square$

مثال ۲۵: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}$ را به دست آورید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} - ۳\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۴\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(-۲) - ۳(۱) + ۴(۴ - ۱) = ۷ \quad \square$$

دستور ساروس

برای محاسبه دترمینان **مرتبه سوم**، می‌توان از روش زیر که به دستور ساروس معروف است، استفاده نمود. دو ستون اول و دوم را کنار ستون سوم می‌نویسیم. در این صورت آرایش حاصل دارای سه قطر از چپ به راست (و از بالا به پایین) موازی با قطر اصلی و سه قطر از راست به چپ (و از پایین به بالا) موازی با قطر فرعی دارد و سپس اعضای روی قطرها را در هم ضرب می‌کنیم و به سه قطر موازی با قطر اصلی، علامت مثبت و به سه قطر موازی با قطر فرعی، علامت منفی می‌دهیم.

$$D = \left|\begin{matrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{matrix}$$

$$D = a_۱b_۲c_۳ + b_۱c_۲a_۳ + c_۱a_۲b_۳ - (a_۳b_۲c_۱ + b_۳c_۲a_۱ + c_۳a_۲b_۱)$$

مثال ۲۶: اگر $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B را حساب کنید.

حل: با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right| = ۰ + ۰ + ۰ - (۱ + ۱ + ۰) = -۲ \quad \square$$

مثال ۲۷: مقدار دترمینان $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل: با استفاده از دستور ساروس داریم

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & -۱ & ۴ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & -۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \end{array}\right| = ۰ + ۶ + ۴ - (۲۴ - ۴ + ۰) = -۱۰ \quad \square$$

۱.۲.۱۰ خواص دترمینان

۱ ــ اگر در یک دترمینان جای تمام سطرها را با تمام ستونهای متناظر عوض کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۶ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

۲ ــ اگر در یک دترمینان جای دو سطر (یا دو ستون) را عوض کنیم دترمینان تغییر علامت می‌دهد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۵ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۵ \end{vmatrix}$$

۳ ـ اگر در یک دترمینان دو سطر (یا ستون) با هم مساوی باشند مقدار دترمینان برابر صفر است.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۴ ـ اگر تمام عضوهای یک سطر (یا یک ستون) دترمینان رادر عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم مقدار دترمینان در آن عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲۲ & ۱۶ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۲ & ۲۵ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۴ \begin{vmatrix} ۴ & ۲۲ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۲۵ & ۳ \end{vmatrix}$$

توجه: از ویژگی‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌گیریم اگر عضوهای دو سطر (یا دو ستون) متناسب باشند، مقدار دترمینان برابر صفر است.

۵ ـ اگر اعضای یک سطر (یا یک ستون) دترمینان حاصل جمع چند عدد باشند، آنگاه دترمینان برابر است با مجموع چند دترمینان، به عنوان مثال داریم:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b & c \\ a'_1 + a'_2 + a'_3 & b' & c' \\ a''_1 + a''_2 + a''_3 & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a'_1 & b' & c' \\ a''_1 & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b & c \\ a'_2 & b' & c' \\ a''_2 & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b & c \\ a'_3 & b' & c' \\ a''_3 & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

۶ ـ هرگاه به عضوهای یک سطر (یا یک ستون) دترمینان m برابر عضوهای یک سطر (یا یک ستون) دیگر همان دترمینان را اضافه کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۷ ـ اگر A یک ماتریس مثلثی بالایی یا پایینی باشد. مقدار دترمینان A برابر با حاصلضرب

عضوهای روی قطر اصلی می‌باشد.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ ۰ & b & b' \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$$

۸ ـ اگر اعضای یک دترمینان توابعی مشتق پذیر از یک متغیر باشند. مشتق دترمینان به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p' & q' & r' \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$$

مثال ۲۸: مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$$

حل: سطر دوم را با سطر اول جمع می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a-c & m-p & x-z \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$$

حال از سطر سوم، ۱− را فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} a-c & m-p & x-z \\ b-c & n-p & y-z \\ a-c & m-p & x-z \end{vmatrix} = ۰$$

چون دو سطر اول و سوم برابر هستند. □

حاصل ضرب دو دترمینان

فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو دترمینان مرتبه سوم به صورت زیر باشند

$$D_۱ = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} \quad , \quad D_۲ = \begin{vmatrix} \alpha_۱ & \beta_۱ & \gamma_۱ \\ \alpha_۲ & \beta_۲ & \gamma_۲ \\ \alpha_۳ & \beta_۳ & \gamma_۳ \end{vmatrix}$$

آنگاه:

$$D_1D_2 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3 & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

همچنین داریم:

$$|AB| = |A||B| \quad \square$$

مثال ۲۹: مقدار دترمینان زیر را حساب کنید

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix}$$

حل: m برابر ستون دوم را به ستون سوم اضافه کرده سپس از ستون اول m و از ستون سوم $m(a+b+c-d)$ را فاکتور می‌گیریم چون دو ستون اول و سوم مساوی می‌شوند، لذا مقدار دترمینان صفر خواهد شد.

$$\begin{vmatrix} m & a-d & ma+mb+mc-md \\ m & b-d & ma+mb+mc-md \\ m & c-d & ma+mb+mc-md \end{vmatrix}$$

$$= m^2(a+b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & a-d & 1 \\ 1 & b-d & 1 \\ 1 & c-d & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

مثال ۳۰: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $A^2 - I_2$، را حساب کنید.

حل:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$det(A^2 - I_2) = 2 \times 10 - 4 \times 8 = 20 - 32 = -12 \quad \square$$

مثال ۳۱: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، مقدار دترمینان $|A^۲|$ را حساب کنید.

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲| = ۱ \times ۴ - ۰ \times ۱ = ۴ \quad \square$$

مثال ۳۲: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۷ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $A \times B$ را حساب کنید.

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۹ & ۸ \\ ۱۹ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = ۲۹ \times ۷ - ۱۹ \times ۸ = ۵۱ \quad \square$$

مثال ۳۳: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$، را حساب کنید.

حل: با استفاده از دستور ساروس داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{matrix}$$

$$= ۱ \times ۱(-۱) + (-۱)(-۱) \times ۱ + ۰ - (۰ + ۰ + ۰) = ۰ \quad \square$$

مثال ۳۴: مقدار دترمینان $A = \begin{vmatrix} x & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$ به ازای چه مقدار x برابر صفر است؟

حل: زیرا به ازای $x = ۱$، ستون سوم، دو برابر ستون اول می‌شود. و بنابر قواعد بیان شده، مقدار دترمینان A برابر صفر است. $\square$

مثال ۳۵: در ازای کدام مقدار $x \neq ۰$ حاصل دترمینان

$\begin{vmatrix} ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+x \end{vmatrix}$ برابر صفر است؟

حل: با استفاده از دستور ساروس داریم

$$\begin{vmatrix} ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+x \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱+x & ۱ \\ ۱ & ۱+x \\ ۱ & ۱ \end{matrix}$$

$$= (۱+x)^۳ + ۱ + ۱ - (۱+x+۱+x+۱+x)$$

$$= ۳x^۲ + x^۳ = ۰ \Rightarrow x^۲(۳+x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \quad x = -۳$$

چون $x \neq ۰$، لذا $x = -۳$ جواب قابل قبول است. □

مثال ۳۶: حاصل دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

حل: ستون اول را در منهای یک ضرب و با ستون دوم جمع کرده و آن را به جای ستون دوم قرار می‌دهیم. همینطور ستون اول را در منهای یک ضرب و با ستون سوم جمع و به جای ستون سوم قرار می‌دهیم و بلاخره ستون اول را در منهای یک ضرب و با ستون چهارم جمع و به جای ستون چهارم می‌گذاریم داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b & -b & -b & -b \\ a & b & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & b & ۰ \\ a & ۰ & ۰ & b \end{vmatrix}$$

مجموع سطرهای دوم و سوم و چهارم را با سطر اول جمع و به جای سطر اول قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} ۴a+b & ۰ & ۰ & ۰ \\ a & b & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & b & ۰ \\ a & ۰ & ۰ & b \end{vmatrix} = (۴a+b)b^۳$$