جزوه درس

ریاضی عمومی۱

تهیه کننده: نعمتی

پاییز ۹۹

تابع: تعریف (۱): هرگاه بین دو شیء a و b ترتیب در نظر بگیریم آن را زوج مرتب نامیده و با نماد (a,b) نمایش میدهیم. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می نامند.

تعریف (۲): حاصلضرب دو مجموعه A و B را با نماد $A\times B$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A , b\in B\}$$

تعریف (۳): هر زیر مجموعه $A\times B$ مانند R را یک رابطه از A به B می نامند $R\subset A\times B$

تعریف (۴): هر رابطه ای که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مؤلفه های اول یکسان نباشد تابع نام دارد.

تعریف (۵): مجموعه مؤلفه های اول زوج های مرتب تابع f را دامنه تابع f می گویند و با D_f نشان میدهند و مجموعه مؤلفه های دوم تمام زوج های مرتب تابع f را برد تابع f می نامند و با R_f نشان میدهند.

$$D_f=\{x\mid (x,y)\in f\} \quad , \quad R_f=\{y\mid (x,y)\in f\}$$

تعریف (۶): هرگاه $f:A\longrightarrow B$ یک تابع و برد آن مجموعه B باشد یعنی $R_f=B$ آنگاه f را پوشا گویند.

تعریف (۷): تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را تابع حقیقی می نامیم. در توابع حقیقی تنها به ذکر ضابطه اکتفا می کنیم. بنابراین هرگاه تنها ضابطه تابع داده شود منظور تابع حقیقی است.

تعریف (۸): بزرگترین زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ که به ازای هر x در آن $f(x)$ با معنا باشد دامنه تابع حقیقی نامیده میشود.

مثال (۱): دامنه چند تابع در زیر داده شده است

۱) $f(x)=2x^2+3x-1 \longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$ $\quad D_g=\{x\mid x^2-2x\neq 0\}=\{x\mid x\neq 0,2\}=\mathbb{R}-\{0,2\}$

۳) $h(x)=\sqrt{x^2+2x}$ $\quad D_h=\{x\mid x^2+2x\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

۴) $p(x)=\tan x$ $\quad D_p=\{x\mid \cos x\neq 0\}=\{x\mid x\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

تمرینات حل شده: توابع زیر را به صورت مجموعه ای از زوج که مرتب بنویسید سپس دامنه و برد هر یک را بیابید

۱) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad f(x)=x-3$

حل: چون دامنه و برد هر دو اعداد طبیعی هستند پس باید $x-3 \geq 1$ باشد در نتیجه $x \geq 4$

$D_f=\{4,5,6,7,8,\dots\}$ و برد $R_f=\{1,2,3,\dots\}$

۲) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ ، $f(x)=\sqrt{-x}$ $\quad -x \geq 0 \longrightarrow x \leq 0$

از مجموعه اعداد صحیح که کوچکتر یا مساوی صفر هستند آنهائی را باید قبول کنیم که $\sqrt{-x}$ عدد طبیعی باشد

پس $D_f=\{-1,-4,-9,-16,-25,\dots\}$ و برد می شود

$R_f=\{1,2,3,4,\dots\}$

۳) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ $\quad D_f=\{x \mid x^2-4 \neq 0\}=\mathbb{Z}-\{2,-2\}$

در تعیین برد کلیه اعداد صحیح بجز ۲ و ۲- را در f به جای x قرار دهیم مجموعه اعداد بدست آمده برد است

۴) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$

در تعیین دامنه چون تابع کسری است تمام اعداد بجز ریشه مخرج یعنی $\frac{1}{2}$ اما چون $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ پس $D_f=\mathbb{Z}$ و برد آن نیز $R_f=\mathbb{Q}$ می باشد.

مثال) دامنه توابع حقیقی زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\frac{4x^2-9}{2x-3}$ $\quad D=\{x \mid 2x-3 \neq 0\}=\{x \mid x \neq \frac{3}{2}\}=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

دامنه توابع کسری همه اعداد بجز ریشه های مخرج است

۲) $f(x)=2x^2-x^4+1$ $\quad D=\mathbb{R}$ $\quad$ دامنه چند جمله ای $\mathbb{R}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ $\quad$ حل $x^2-3x \geq 0$ $\quad x^2-3x=0$ $\quad x=0,3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

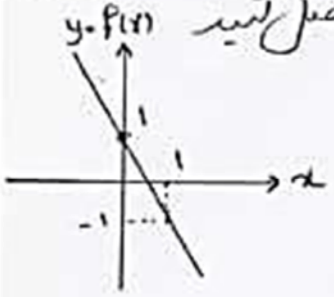
$D=(-\infty,0] \cup [3,+\infty)$

۴) $f(x)=\sqrt{2-|x|}$ $\quad 2-|x| \geq 0 \longrightarrow 2 \geq |x| \longrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$D=[-2,2]$

نمودار بعضی از توابع

۱- نمودار تابع خطی $f(x)=ax+b$. کافی است دو نقطه دلخواه روی خط را پیدا کنید و سپس آن را در دستگاه مختصات مشخص کرده، بهم متصل کنید

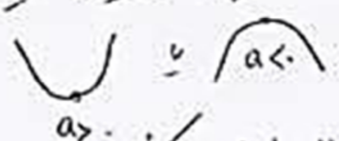


x	y
0	1
1	-1

مثال) نمودار $y=f(x)=-2x+1$ را رسم کنید

۲- نمودار تابع $y=f(x)=ax^2+bx+c \quad a\neq 0$

ابتدا نقطه رأس منحنی یعنی $x=\frac{-b}{2a}$ را تعیین کنید آن را در تابع به جای x قرار دهید و y متناظر را پیدا نمایید سپس دو عدد دلخواه در طرفین این نقطه انتخاب کنید.
در حالت کلی نمودار به صورت



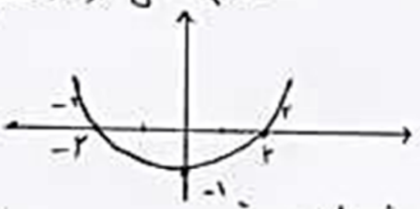
یا ... است

مثال) نمودار $y=\frac{1}{2}x^2-1$ را رسم کنید

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{1}=0 \to y=-1$

رأس $(0,-1)$

x	-2	0	2
y	1	-1	1



نمودار تابع چند ضابطه‌ای:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1\\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & x\in D_n\end{cases}$$

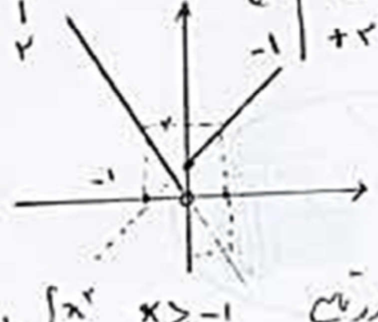
تابع چند ضابطه‌ای است

برای رسم نمودار هر ضابطه را بطور جداگانه رسم کرده و سپس آن قسمتی را که در ناحیه مورد نظر است نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0\\ -2x & x<0\end{cases}$$

x	$y_1=x+1$
0	1
1	2

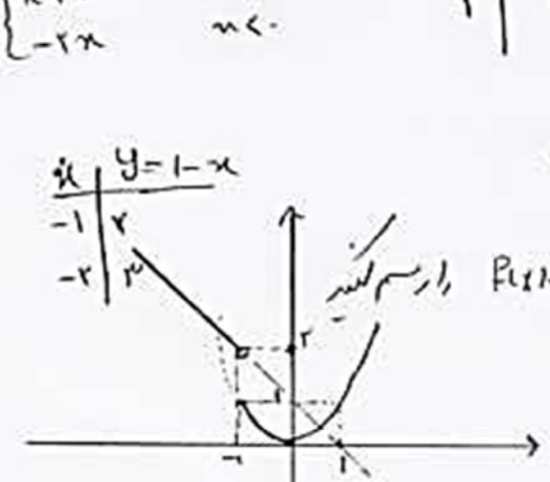
x	$y_2=-2x$
0	0
-1	+2



مثال) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq -1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$ را رسم کنید

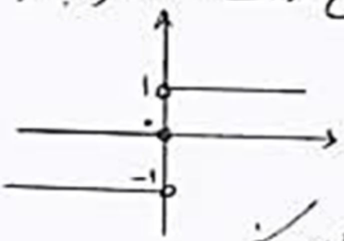
x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1

x	$y=1-x$
-1	2
-2	3



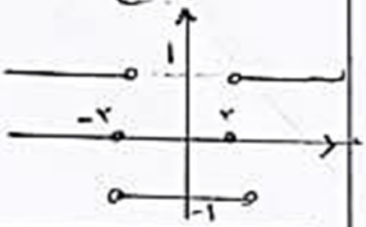
تابع علامت : تابع سه ضابطه‌ای زیر را تابع علامت نامند و آن را با نماد $\operatorname{sgn}(x)$ نمایش می‌دهیم

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

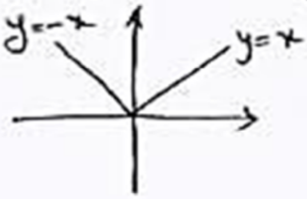


مثال) تابع $f(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)$ را رسم کنید

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x^2-4)=\begin{cases}1 & x^2-4>0\\ 0 & x^2-4=0\\ -1 & x^2-4<0\end{cases}=\begin{cases}1 & x<-2 \text{ یا } x>2\\ 0 & x=2,-2\\ -1 & -2<x<2\end{cases}$$

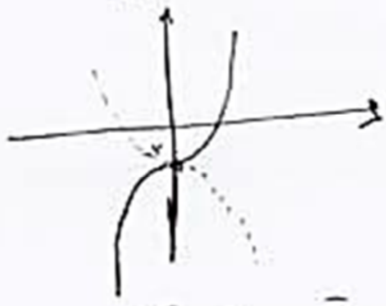


تابع قدر مطلق : تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ را تابع قدر مطلق گویند



مثال) تابع $f(x)=x|x|-2$ را به صورت تابع چند ضابطه‌ای بنویسید، نمودارش را رسم کنید

$$f(x)=x|x|-2=\begin{cases}x^2-2 & x\geq 0\\ -x^2-2 & x<0\end{cases}$$



تابع جزء صحیح : تعریف جزء صحیح یک عدد : برای هر عدد حقیقی x عددی مانند n منحصر به فرد پیدا می‌کنیم که $n\leq x<n+1$. عدد n را جزء صحیح x گوییم و با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم

مثال $[\pi]=3$ $\quad [e]=2$ $\quad [\sqrt{2}]=1$ ، $[2]=2$ ، $[-3{,}2]=-4$

تابع $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح گویند

خواص مهم جزء صحیح :

$x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$

1) $[x+n]=[x]+n$ $\quad$ 2) $[x]\leq x<[x]+1$ $\quad$ 3) $x-1<[x]\leq x$

مثال) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$[x]=3 \longrightarrow 3\leq x<4$ جواب

مثال) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=1 \longrightarrow 1\le \frac{x-1}{2}<2 \Longrightarrow 2\le x-1<4 \quad \boxed{3\le x<5}$

$2[2x+1]=3 \longrightarrow [2x+1]=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z} \longrightarrow$ مسئله جواب ندارد

$[2x-1]\ge 3 \longrightarrow [2x]-1\ge 3 \longrightarrow [2x]\ge 4 \quad 2x\ge 4 \quad \boxed{x\ge 2}$

مثال) نمودار تابع $f(x)=[x]$ به صورت زیر است.

مثال) نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ را در $x\in[-1,2]$ رسم کنید.

حل:

$y=x-1 \longleftarrow [x]=-1 \longleftarrow -1\le x<0$

$y=x \longleftarrow [x]=0 \longleftarrow 0\le x<1$

$y=x+1 \longleftarrow [x]=1 \longleftarrow 1\le x<2$

تابع متناوب: تابع f را متناوب گویند هرگاه عددی حقیقی مانند $t\neq 0$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x+t)=f(x)$ ، $(x+t)\in D_f$

کوچکترین مقدار مثبت T را در صورت وجود، دوره تناوب اصلی تابع f گویند.

مثال) دامنه تابع $f(x)=x-[x]$ برابر $\mathbb{R}$ است و برای هر $n\in\mathbb{Z}$ داریم

$$f(x+n)=(x+n)-[x+n]=(x+n)-([x]+n)=x+\cancel{n}-[x]-\cancel{n}=x-[x]=f(x)$$

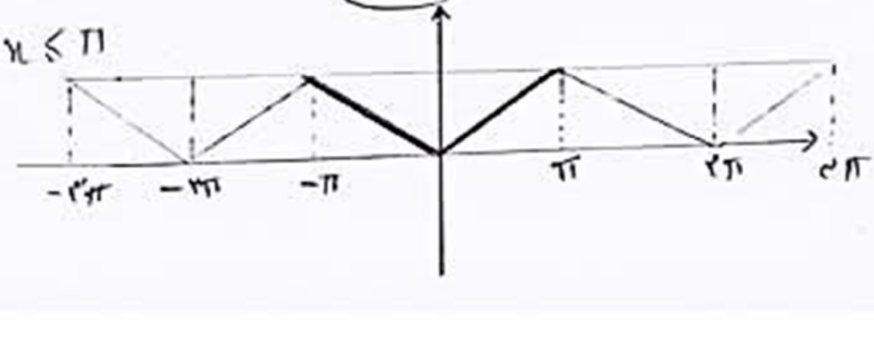
پس تابع متناوب است. چون کوچکترین عدد صحیح مثبت عدد ۱ است پس $T=1$

نکته: روش دیگری برای معرفی یک تابع متناوب مانند f، این است که ضابطه تابع را در دامنه‌ای به طول T همراه با شرط $f(x+T)=f(x)$ می‌دهند.

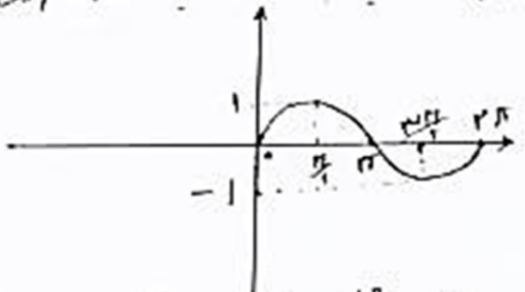
مثال) در زیر ضابطه و نمودار یک تابع متناوب داده شده است.

$f(x)=|x| \quad -\pi\le x\le\pi$

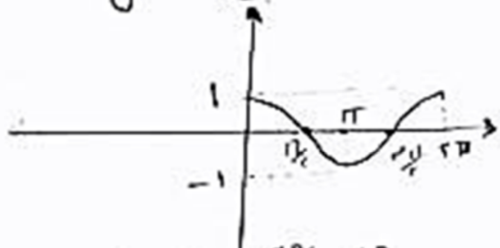
$f(x+2\pi)=f(x)$



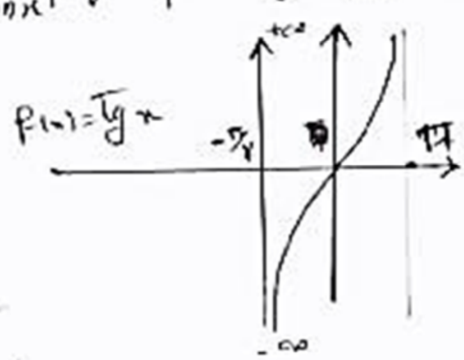
نمودار توابع اساسی مثلثاتی: توابع $f(x)=\sin x$ ، $f(x)=\cos x$ متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ هستند و توابع $f(x)=Tg(x)$ ، $f(x)=coTg(x)$ متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ می‌باشند

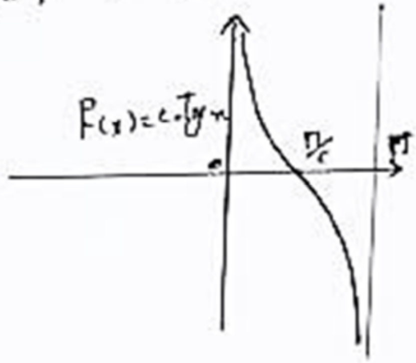


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1





تمرینات: نمودار توابع زیر را رسم کنید

1) $f(x)=2|x-1|$ 2) $f(x)=x|x|$ 3) $f(x)=|x^2-4x|$

4) $f(x)=|x|-|x-1|$ 5) $f(x)=|x|+|x-1|$

معادلات زیر را حل کنید

1) $[2x+1]=5$

2) $\left[\frac{x-3}{2}\right]=-1$

3) $|[x]|=1$

نامعادلات زیر را حل کنید

1) $[x]\geq 2$

2) $[x]>-2$

3) $[x]<-5$

تمرینات حل شده: ثابت کنید توابع زیر متناوب هستند و دوره تناوب اصلی آنها را بیابید

$f(x)=\sin(4x+1) \xrightarrow{\text{حل}} f(x+T)=f(x) \longrightarrow \sin(4(x+T)+1)=\sin(4x+1)$

چون دوره تناوب تابع سینوس 2π است پس

$4(x+T)+1=2k\pi+(4x+1)$

$4x+4T+1=2k\pi+4x+1 \longrightarrow T=\frac{k\pi}{2} \xrightarrow{k=1} T=\frac{\pi}{2}$ دوره تناوب اصلی

$f(x)=Tg(-2x)$ $\quad \Rightarrow f(x+T)=f(x) \longrightarrow Tg(-2(x+T))=Tg(-2x)$

چون دوره تناوب Tg برابر π است پس:

$-2(x+T)=-2x+\pi \longrightarrow \cancel{-2x}-2T=\cancel{-2x}+k\pi \longrightarrow T=\frac{-k\pi}{2} \xrightarrow{k=-1} T=\frac{\pi}{2}$

کوچکترین مقدار مثبت T را دوره تناوب گویند

تمرینات: نمودار توابع زیر را در یک فاصله به طول دوره تناوب رسم کنید

1) $f(x)=1-\sin x$ $\qquad$ 2) $f(x)=2\cos x+1$ $\qquad$ 3) $f(x)=Tg(x-\frac{\pi}{2})$

اعمال روی توابع

تعریف (۱): فرض f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند توابع جدیدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x) \qquad D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$

$(f.g)(x)=f(x).g(x) \qquad D_{fg}=D_f\cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

مثال) هرگاه $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=\sqrt{2-x}$ ضابطه و دامنه توابع $f+g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ را معین کنید.

$D_f=\{x \mid x-1\geq 0\}=[1,+\infty) \qquad D_g=\{x \mid 2-x\geq 0\}=(-\infty,2]$

$D_f\cap D_g=[1,2] \longrightarrow$ دامنه $f.g$ ، $f+g$

$(f+g)(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x} \qquad (f.g)(x)=\sqrt{x-1}.\sqrt{2-x}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} \qquad D_{f/g}=[1,2)$

مثال) توابع f و g داده شده‌اند ضابطه $f+2g$ را بنویسید

$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\leq 5\\ x^2-1 & x>5\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}4x+3 & x<2\\ 3x-1 & x\geq 2\end{cases}$

با توجه به دامنه f و g که هر دو IR هستند میتوان آنرا به صورت

$D=(-\infty,2)\cup[2,5]\cup(5,+\infty)$ داریم

$(f+2g)(x)=\begin{cases}(2x-1)+2(4x+3) & x<2\\ (2x-1)+2(3x-1) & 2\leq x\leq 5\\ (x^2-1)+2(3x-1) & x>5\end{cases}=\begin{cases}10x+5 & x<2\\ 8x-3 & 2\leq x\leq 5\\ x^2+6x-3 & x>5\end{cases}$

ترکیب دو تابع: ترکیب دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \qquad D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \qquad D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال) هرگاه داشته باشیم $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، ضابطه و دامنه توابع $f\circ g$ ، $g\circ f$ و $g\circ g$ را مشخص کنید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$ $\quad D_g=[1,+\infty)$ $\quad (f\circ g)(x)=f(g(x))=[g(x)]^2=(\sqrt{x-1})^2=x-1$

$$D_{f\circ g}=\{x\mid x\geq 1 ,\ \sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=[1,+\infty)$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-1}=\sqrt{x^2-1}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 1\}=\mathbb{R}-(-1,1)$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{\sqrt{x-1}-1}$$

$$D_{g\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_g\}=\{x\mid x\geq 1 ,\ \sqrt{x-1}\geq 1\}=[2,+\infty)$$

تذکر: تعیین دامنه تابع مرکب $f\circ g$ از روی ضابطه آن به دلیل ساده شدن عبارت در محاسبات جبری، در بعضی از مواقع درست نمی‌باشد.

تمرین ۱) هرگاه داشته باشیم $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ، $g(x)=\frac{1}{x+2}$ ، ضابطه و دامنه توابع $f\circ g$ ، $g\circ f$ ، $g\circ g$ ، $f\circ f$ را بیابید.

۲) هرگاه $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\sin x$ ، $h(x)=x^2$ باشند ضابطه $f\circ g\circ h$ و $g\circ f\circ h$ را بنویسید.

مثال) اگر $(f\circ g)(x)=x^2+2x$ و $g(x)=3-2x$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل: فرض کنید $t=g(x)=3-2x$ داریم $x=\frac{3-t}{2}$ لذا تبدیل درست

حالا با درج شده داریم: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\left(\frac{3-t}{2}\right)^2+2\left(\frac{3-t}{2}\right)=\frac{1}{4}(t^2-10t+21)$

۹۰

مثال) با فرض $f(\frac{x}{x-2}) = 3x+4$ ، ضابطه $f(x)$ را بیابید

حل: $t=\frac{x}{x-2} \longrightarrow x=\frac{2t}{t-1} \longrightarrow f(t)=3(\frac{2t}{t-1})+4=\frac{10t+4}{t-1}$

$\xrightarrow{t\to x} f(x)=\frac{10x+4}{x-1}$

تابع زوج و تابع فرد :

تعریف ۱ : مجموعه A را متقارن نامیم هرگاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم $-x\in A$

تعریف ۲ : تابع f را زوج گوییم هرگاه :

الف) دامنه f متقارن باشد ب) برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(-x)=f(x)$

مثال) تابع $f(x)=x^2$ زوج است زیرا $D_f=\mathbb{R}$ و داریم $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

تابع فرد: تابع f را فرد گوییم هرگاه : الف) دامنه f را متقارن باشد ب) برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$

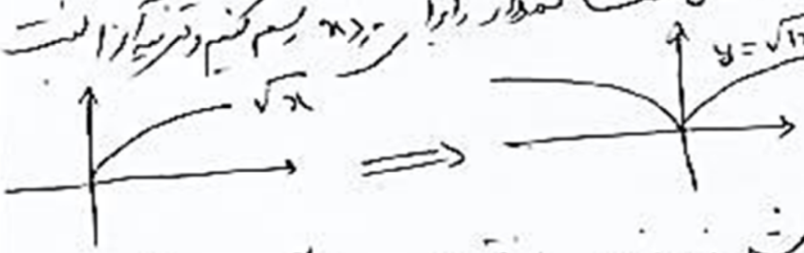
مثال) تابع $f(x)=x^3$ فرد است زیرا $D_f=\mathbb{R}$ داریم

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

مثال) نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را رسم کنید. حل: دامنه تابع $D=\mathbb{R}$ است زیرا برای هر x داریم $|x|\geq 0$ از طرفی دیگر تابع زوج است زیرا

$f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$

پس نسبت به محور y ها متقارن است. کافی است نمودار را برای $x\geq 0$ رسم کنیم و قرینه آن را نسبت به محور y ها رسم نماییم.



تذکر : ممکن است تابعی نه زوج باشد و نه فرد. مانند تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ چرا؟

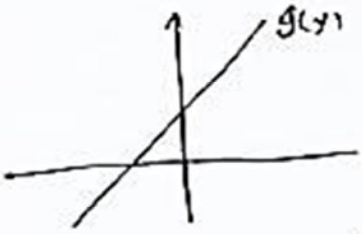
تابع صعودی : تابع f را صعودی گوییم هرگاه با افزایش x ها مقدار y نیز افزایش یابد یا ثابت بماند یعنی

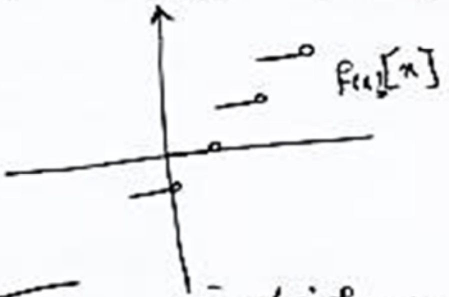
$\forall a,b\in D_f: a<b \longrightarrow f(a)\leq f(b)$

تعریف تابع نزولی: تابع f را نزولی گوئیم هرگاه با افزایش x، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند یعنی:

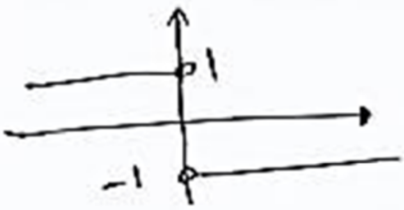
$$\forall a,b \in D_f: a<b \longrightarrow f(a)\geq f(b)$$

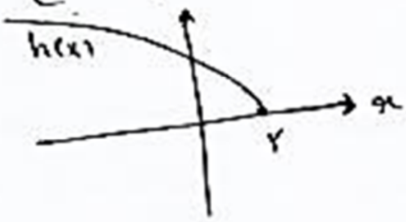
مثال) تابع $f(x)=[x]$ صعودی و $g(x)=2x+1$ اکیداً صعودی است





تابع $f(x)=-sgn(x)$ نزولی و تابع $h(x)=\sqrt{2-x}$ اکیداً نزولی است





توجه ۱) با توجه به تعریف، تابع ثابت $f(x)=c$ هم صعودی است و هم نزولی

۲) ممکن است یک تابع در یک بازه صعودی و در بازه‌ای دیگر نزولی باشد مانند تابع $y=(x-1)^2$ که در بازه $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی و در بازه $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است

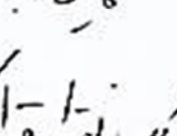
مثال) به کمک تعریف نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{-1}{2x}$ برای $x>0$ اکیداً صعودی است

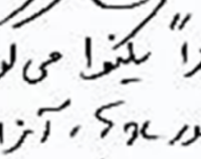
حل: فرض $0<a<b \longrightarrow 0<2a<2b \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 0<\frac{1}{2b}<\frac{1}{2a} \longrightarrow \frac{-1}{2a}<\frac{-1}{2b}$

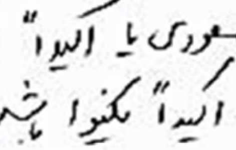
$\Longrightarrow f(a)<f(b)$ بنابراین تابع f در $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است

تعریف: تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد تابع یکنوا نام دارد همچنین تابعی را که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گویند.

نکته: تابعی که اکیداً یکنوا باشد، هر خط موازی محور xها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند







تمرینات: ① هرگاه داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید

② توابع f و g به صورت زیر داده شده است ضابطه تابع $f+g$ را بدست آورید

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & x\geq 3 \\ x & x<3 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$$

③ توابع f و g به صورت زیر داده شده است ضابطه $f\cdot g$ را بدست آورید

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1} & x>1 \\ x & x\leq 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>2 \\ x-1 & x\leq 2 \end{cases}$$

④ هرگاه داشته باشیم $f(x)=1-x$ و $g(x)=x^2+bx+c$ ، مقادیر b و c را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$(fog)(x)=-x^2+5x+3$$

⑤ با فرض $f(2-x)=x^2+2x$ ، ضابطه $f(x)$ را معرفی کنید

⑥ با توجه به تعریف زوج یا فرد، توابع زیر را بررسی کنید

1) $f(x)=x^2+|x|-2$ 2) $f(x)=x^3+x$

3) $f(x)=x^3\sqrt{x}$ 4) $f(x)=|x|-x$

⑦ اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد با ذکر دلیل زوج یا فرد بودن توابع زیر را با فرض آنکه دامنه آنها متقارن باشد مشخص کنید

1) $f\cdot g$ 2) $\frac{f}{g}$ 3) fof 4) gog 5) fog

بعنوان نمونه $\frac{f}{g}$ را حل می‌کنیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}\overset{\text{زوج}}{=}\frac{f(x)}{-g(x)}=-\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=-\left(\frac{f}{g}(x)\right)\Rightarrow$$ فرد

$$(fof)(-x)=f\big(f(-x)\big)=f\big(f(x)\big)=(fof)(x)\longrightarrow$$ زوج

چون f زوج است

⑧ صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید

1) $f(x)=3-2x$ $f(x)=\sqrt{2+x}$

2) $f(x)=\frac{1}{x}\ (x>0)$ $f(x)=x^3+2$

تابع یک به یک: تابع f را یک به یک گوییم هرگاه:

$$\forall a,b,\quad a\neq b \Longrightarrow f(a)\neq f(b)$$

به عبارت دیگر: اگر $f(a)=f(b)$ باشد آنگاه نتیجه شود که $a=b$ است

مثال) تابع $f=\{(1,1)(2,4)(3,4)\}$ یک به یک نیست زیرا $f(2)=f(3)=4$ ولی $2\neq 3$

مثال) تابع $f(x)=x^3+1$ یک به یک است زیرا

$$f(a)=f(b)\Longrightarrow a^3+1=b^3+1 \longrightarrow a^3=b^3 \longrightarrow \boxed{a=b}$$

نکته: اگر نمودار تابع f را در اختیار داشته باشیم و هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن تابع یک به یک است. پس توابع اکیداً یکنوا، یک به یک می‌باشند مانند تابع $f(x)=x^3$

تابع $f(x)=|x|$ یک به یک نیست

تابع معکوس: هرگاه در زوج‌های مرتب تابع f جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم رابطه‌ی جدیدی حاصل می‌شود که آن را معکوس رابطه f می‌نامند و با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

لازم به ذکر است که معکوس هر تابع ممکن است تابع نباشد اگر f^{-1} تابع باشد آن را تابع معکوس f می‌نامند.

مثال) $f=\{(1,2)(2,3)(3,2)\}$ تابع است ولی $f^{-1}=\{(2,1)(3,2)(2,3)\}$ تابع نیست.

نکته: از مثال قبل متوجه می‌شویم که اگر تابع f شرط یک به یک بودن را دارا باشد معکوس آن یعنی f^{-1} تابع است

خواص تابع معکوس:

1) $D_{f^{-1}}=R_f \quad , \quad R_{f^{-1}}=D_f$

2) $\forall x\in D_f \quad f^{-1}of(x)=x \qquad \forall x\in D_{f^{-1}} \quad , \quad fof^{-1}(x)=x$

3) نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.

ضابطه تابع معکوس: برای یافتن ضابطه تابع معکوس به روش زیر عمل کنید

1) در تابع $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y می‌نویسید 2) در رابطه جدید به جای x، y و به جای y، x قرار دهید 3) برای y جدید نام $f^{-1}(x)$ را انتخاب کنید

مثال) تابع معکوس $f(x)=2x^3+1$ را در صورت وجود بیابید

1) $y=2x^3+1 \xrightarrow[\text{بررسی کنید}]{\text{یک به یک بودن آن را}} y_1=y_2 \Rightarrow 2x_1^3+1=2x_2^3+1 \to x_1^3=x_2^3 \Rightarrow x_1=x_2$ یک به یک است

2) $y=2x^3+1 \to y-1=2x^3 \Rightarrow x^3=\frac{y-1}{2} \to x=\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow$

$y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

مثال) معکوس پذیر بودن $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ را بررسی کنید در صورت وجود، معکوس آن را بیابید

حل. شرط معکوس پذیری یک به یک بودن است

$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ $\quad \frac{a-2}{a+1}=\frac{b-2}{b+1} \Rightarrow (a-2)(b+1)=(b-2)(a+1)$

$\xrightarrow{\text{ساده کنید}} a=b \Rightarrow$ f معکوس پذیر است

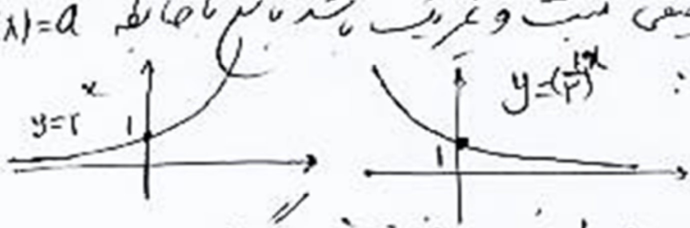
$y=\frac{x-2}{x+1} \to xy+y=x-2 \Rightarrow xy-x=-y-2 \quad x(y-1)=-y-2$

$x=\frac{-y-2}{y-1} \Rightarrow x=\frac{y+2}{1-y} \xrightarrow[\text{عوض کنید}]{\text{جای x و y را}} y=\frac{x+2}{1-x} \to f^{-1}(x)=\frac{x+2}{1-x}$

مثال) هرگاه $f(x)=2x+1$ ، $g(x)=3-2x$ نشان دهید که

$(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$

تابع نمایی: هرگاه a یک عدد حقیقی مثبت و غیر یک باشد تابع با ضابطه $f(x)=a^x$ را تابع نمایی گویند مانند:



چند نکته در مورد تابع نمایی: 1) خط $y=0$ را مجانب افقی تابع گویند

2) دامنه آن $D=R$ است 3) برد آن $(0,+\infty)$ است

4) اگر $a>1$ باشد $y=a^x$ اکیداً صعودی و اگر $a<1$ باشد $y=a^x$ اکیداً نزولی است

5) $y=a^x$ یک به یک است پس معکوس دارد. معکوس آن را تابع لگاریتم گویند

$f(x)=a^x \longrightarrow f^{-1}(x)=\log_a x \quad D_{f^{-1}}=R_f=(0,+\infty)$

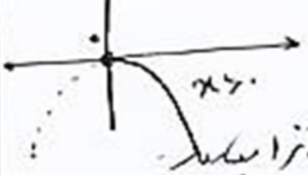
نتیجه: تابع لگاریتم فقط برای اعداد مثبت قابل تعریف است.

نکته: هرگاه در تابع لگاریتمی با عدد a، عدد e (عدد نپر) را قرار دهیم تابع $y=e^x$ را تابع نمایی طبیعی و تابع $y=\ln x$ را که با $y=\log_e x$ نمایش می‌دهیم تابع لگاریتمی طبیعی می‌گویند.

مثال) نمودار تابع $y=-9^{\log_3 x}$ را رسم کنید

حل: داریم $x>0$ پس $D=(0,+\infty)$ با استفاده از توان و خواص لگاریتم داریم

$$y=-9^{\log_3 x}=-(3^2)^{\log_3 x}=-3^{2\log_3 x}=-3^{\log_3 x^2}=-x^2 \Rightarrow y=-x^2$$



نکته) $a^{\log_a x}=x$ و $\log_a a=1$

مثال) اگر $f(x)=1+2^{-x}$ یک به یک باشد ضابطه تابع معکوس آنرا بیابید

حل $y=1+2^{-x} \longrightarrow y-1=2^{-x} \Rightarrow \log_2(y-1)=\log_2(2^{-x})=-x\log_2 2=-x$

تبصره: پایه لگاریتم را ۲ در نظر گرفتیم

$$-x=\log_2(y-1) \Rightarrow x=-\log_2(y-1) \Rightarrow y=-\log_2(x-1)=f^{-1}(x)$$

مثال) دامنه $y=\log_2\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$ را بیابید

توابع هیپربولیک (هذلولی): به کمک دو تابع $y=e^x$ و $y=e^{-x}$ توابع زیر را که به توابع هیپربولیک یا هذلولی معروف هستند تعریف می‌کنیم

1) $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ سینوس هیپربولیک

2) $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ کسینوس هیپربولیک

$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\coth(x)=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

خواص توابع هیپربولیک:

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}$

$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

تمرین) ۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید

۱) $f(x)=\log_2(x+1)$ ۳) $y=\log_2|x|$

۲) $f(x)=\text{Sgn}(2^x)$ ۴) $y=2^{\log_2 x}$

۲) زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید

۱) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ ۲) $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

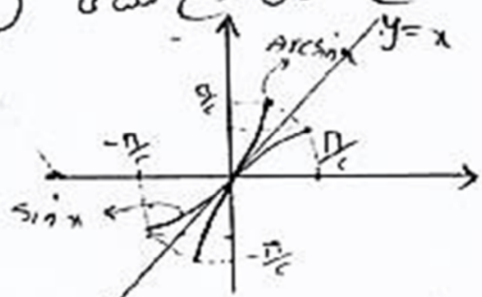
۳) درستی خواص زیر را برای توابع هیپربولیک بررسی کنید

۱) $\cosh(-x)=\cosh(x)$ ۳) $\sinh(x+y)=\sinh x\cdot\cosh y+\cosh x\sinh y$

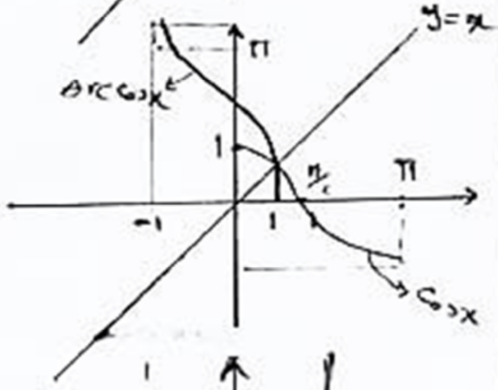
۲) $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ ۴) $\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x$

توابع معکوس توابع مثلثاتی

۱) تابع $y=\sin x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ یک به یک است لذا معکوس دارد که آن را با نماد $y=\text{Arcsin}\,x$ نمایش میدهیم

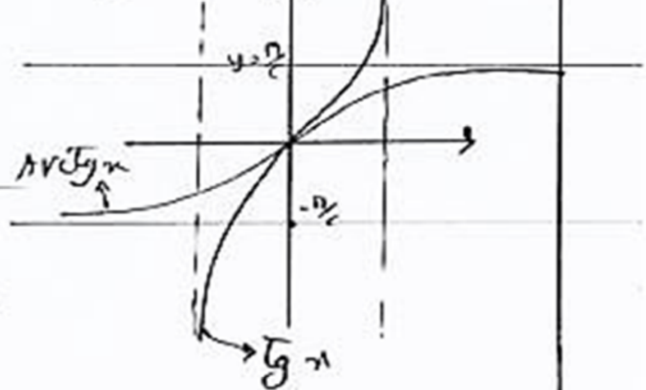


۲) تابع $y=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ یک به یک بوده پس معکوس پذیر است معکوس آن $y=\text{Arccos}\,x$ است

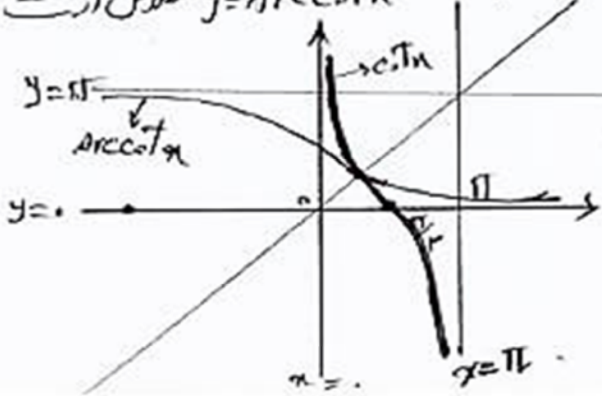


۳) تابع $y=\tan x$ در بازه $(-\pi/2,\pi/2)$ یک به یک بوده پس معکوس پذیر است معکوس آن $y=\text{Arctg}\,x$ یا $y=\tan^{-1}x$ است

خطوط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=-\frac{\pi}{2}$ مجانب های قائم $y=\text{tg}\,x$ و $y=\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ مجانب افقی $y=\text{Arctg}\,x$ است



۴) تابع $y=\cot x$ در بازه $(0,\pi)$ یک به یک و معکوس پذیر است $y=\text{Arccot}\,x$ معکوس آن است



مثال) در تابع $f(x)=\text{ArcCos}\,x$ مقادیر زیر را بیابید $f(\frac{1}{2})$ ، $f(-1)$ ، $f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

حل: $y=\text{ArcCos}(\frac{1}{2}) \longrightarrow \text{Cos}\,y=\frac{1}{2}=\text{Cos}\frac{\pi}{3} \Longrightarrow y=\frac{\pi}{3}$ توجه داریم y بدست آمده باید بین ۰ و π باشد

$y=\text{ArcCos}(-1) \longrightarrow \text{Cos}\,y=-1=\pi \longrightarrow y=\pi$

$y=\text{ArcCos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{Cos}\,y=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{Cos}(\pi-\frac{\pi}{6})=\text{Cos}\frac{5\pi}{6} \quad y=\frac{5\pi}{6}$

مثال) دامنه $y=\text{ArcSin}(2x-1)$ را بیابید. حل میدانیم دامنه تابع معکوس برابر برد خود تابع است یعنی

$D_{f^{-1}}=[-1,1] \Longrightarrow -1\leq 2x-1\leq 1 \Longrightarrow 0\leq 2x\leq 2 \longrightarrow \boxed{0\leq x\leq 1}$

»»» حد و پیوستگی «««

مثال) تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ را در نظر بگیرید. این تابع در $x=1$ تعریف نشده است (مقدار ندارد) ولی میخواهیم بدانیم وقتی که مقادیر x از سمت چپ (مقادیر کمتر از ۱) و یا از راست (مقادیر بیشتر از ۱) به $x=1$ نزدیک شوند برای تابع $f(x)$ چه اتفاقی می افتد. برای پاسخ جدول زیر را در نظر بگیرید

x	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱ $\longrightarrow$	۱
$f(x)$	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۰۰۱ $\longrightarrow$	۲

x	۰	۰/۵	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	... $\longrightarrow$	۱
$f(x)$	۱	۱/۵	۱/۷۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\longrightarrow$	۲

با مشاهده جدول وقتی x از مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک میشود مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک میشوند در اینجا میگوییم حد راست تابع در نقطه ۱ برابر ۲ است و مینویسیم $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ و به همین دلیل حد چپ تابع در نقطه ۱ برابر ۲ است و مینویسیم $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

مثال) برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=0$ اگر جدول مانند جدول بالا تشکیل دهید می‌بینیم که حد راست تابع برابر صفر ولی حد چپ وجود ندارد زیرا تابع برای xهای کمتر از صفر تعریف نشده است

تعریف: هرگاه حد چپ و حد راست تابع در نقطه‌ای مانند $x=a$ موجود و با هم برابر باشند گوییم تابع در نقطه a حد دارد.

قضایای حد: قضیه ۱: هرگاه a و c دو عدد حقیقی باشند برای تابع ثابت $f(x)=c$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

قضیه ۲: هرگاه $f(x)=x$ و $a\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

قضیه ۳: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ باشد و k عددی ثابت آنگاه:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = kL$$

قضیه ۴: هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ باشد آنگاه:

۱) $\lim\limits_{x\to a} (f\pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

۲) $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

۳) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ ، $L_2 \neq 0$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = L^n$

۵) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ اگر f یک چند جمله‌ای باشد داریم

تعریف: هرگاه $a\in\mathbb{R}$ و $h>0$ باشد مجموعه $(a-h, a+h)$ را یک همسایگی نقطه a گویند و همچنین مجموعه $(a-h, a)\cup(a, a+h)$ را همسایگی محذوف نقطه a گویند.

قضیه ۵: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و n عدد طبیعی غیر از 1 باشد آنگاه:

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ، $L>0$ ، n زوج یا فرد / $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} =$ تعریف نشده اگر n زوج و L منفی باشد

اگر n زوج و $L=0$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$ ممکن است موجود نباشد و یا برابر صفر باشد.
در صورتی صفر است که در یک همسایگی محذوف $x=a$ تابع f منفی نباشد.

مثال) حدهای زیر را به کمک قضایای حد محاسبه کنید

1) $\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{x^2-8} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -3}(x^2-8)} = \sqrt[3]{(-3)^2-8} = \sqrt[3]{1} = 1$

2) $\lim_{x\to 0}\sqrt[4]{x^2+3x-1} = \sqrt[4]{\lim_{x\to 0}(x^2+3x-1)} = \sqrt[4]{-1}$ حد موجود نیست

3) $\lim_{x\to -2}\sqrt[4]{x+2} = \sqrt[4]{-2+2} = \sqrt[4]{0} = ?$ چون تابع در همسایگی محذوف (۲-) مثبت نمی‌باشد
پس تابع حد ندارد به بیان دیگر تابع زیر رادیکال برای $x<-2$ منفی است.

4) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{0} = ?$ در هر همسایگی محذوف عدد $x=1$ تابع زیر رادیکال همواره مثبت است
پس حد برابر $\sqrt{0}=0$ است زیرا $x^2-2x+1=(x-1)^2 \geq 0$

نکته: هرگاه حد تابع در یک نقطه به صورت $\frac{0}{0}$ درآید آن را مبهم می‌نامیم و روشهای مختلفی با توجه به نوع تابع برای رفع ابهام وجود دارد

مثال)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} \xRightarrow{\text{مبهم}} \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

پس در توابع کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند عامل صفر کننده را تفکیک پیدا می‌کنیم و آن را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم سپس حد می‌گیریم.

مثال) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

مثال) مقدار $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ را بیابید

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2} = 1/4$$

توجه: صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+2$ یعنی مزدوج صورت ضرب کردیم تا عامل صفر کننده یعنی $(x-4)$ در صورت نیز ظاهر شود که با حذف آن از صورت و مخرج، حد را محاسبه کردیم

19

مثال: مطلوبست: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{0}{0}$

حل: همزمان با تجزیه صورت، مخرج کسر را نیز گویا کنید

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)}$$

$$= \frac{(1+1)(\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1)}{1} = 2\times 3 = 6$$

قضیه: برای هر عدد حقیقی a همواره داریم

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

مثال) مطلوبست

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} (2\cos x - 3\sin x) = 2\cos\frac{\pi}{6} - 3\sin\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}-\frac{3}{2}$$

قضیه:

$$\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \;,\; a\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \cot x = \cot a \;,\; a\neq k\pi$$

قضیه: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (توجه x برحسب رادیان است)

مثال) حدهای زیر در برخورد اول به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آیند و به کمک قضیه فوق رفع ابهام می‌شوند

1) $\lim_{t\to 2} \frac{\sin(t-2)}{t-2} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ مبهم

با فرض $x=t-2$ وقتی $t\to 2$ میل کند x به سمت صفر میل می‌کند پس

$$\lim_{t\to 2} \frac{\sin(t-2)}{t-2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{:طبق قضیه}$$

(فرض $5t=x$)

2) $$\lim_{t\to 0} \frac{\sin 5t}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{\sin 5t}{5t} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}$$

(فرض $z=x+\frac{\pi}{2}$)

3) $$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \quad \cdots = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{(x+\frac{\pi}{2})} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cdot\sin x^2\cdot\sin x^3}{5x^6} = \frac{0}{0} \;(\text{مبهم}) = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\times\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3}$$

$$= \frac{1}{5}(1)(1)(1) = \frac{1}{5}$$

نتیجه: از قضیه نتایج زیر حاصل میشود که برای حل سریع حدها میتوان کمک گرفت

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

۴) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{nx}{\sin(mx)}=\frac{n}{m}$ ۵) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{(nx)}=\frac{m}{n}$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\tan(nx)}=m/n$

۶) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(mx)}{\tan(nx)}=m/n$ ۷) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}=\frac{m}{n}$

مثال) مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx-\sin ax}{(b-a)x}$ را بیابید $(b\neq a)$. در برخورد اول با $\frac{0}{0}$ ب

حل: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx-\sin ax}{(b-a)x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{(b-a)x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{(b-a)x}=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$

تذکر: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ روش ساده و مناسب دیگری بنام قاعده هوپیتال وجود دارد که بعداً در آشنایی با مشتق با روش آن آشنا خواهید شد.

قضیه فشردگی: هرگاه توابع f، g، h بگونه‌ای باشند که در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ و همچنین $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$ در اینصورت: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

مثال) مقدار $\lim(x^2\sin\frac{1}{x})$ را بیابید

حل: تابع $\sin\frac{1}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده، پس نمیتوان از قضیه حدها ضرب استفاده کرد. اما:

$$\left.\begin{array}{ll} x\neq 0 & -1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1 \\ x\neq 0 & x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

با فرض $h(x)=x^2$ ، $g(x)=-x^2$ در هر همسایگی محذوف $x=0$ داریم تابع $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ بین $h(x)$ و $g(x)$ قرار دارد که طبق قضیه فشردگی چون $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$ پس

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

مثال) هرگاه تابع f گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم $|f(x)+5| \le (x-1)^2$ مقدار $\lim_{x\to 1} f(x)$ را بیابید.

حل: به کمک خاصیت قدر مطلق | $-a\le x\le a \xleftarrow{a>0} |x|\le a$) میتوان نوشت

$$-(x-1)^2 \le f(x)+5 \le (x-1)^2 \Rightarrow -5-(x-1)^2 \le f(x) \le -5+(x-1)^2$$

چون $\lim_{x\to 1} -5+(x-1)^2 = -5 = \lim_{x\to 1} -5-(x-1)^2$ پس $\lim_{x\to 1} f(x) = -5$

تذکر: برای محاسبه حد توابعی که شامل قدر مطلق، جزء صحیح یا تابع علامت هستند ناحیه‌ای را که عدد x در آن واقع باشد را در نظر بگیرید تا تابع را در دسته ... برای حذف علامت قدر مطلق، جزء صحیح یا تابع علامت نشان شده یعنی معادل آن‌ها را بنویسید سپس اقدام به محاسبه حد نمایید.

مثال) مطلوبست: $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]+2}{3-x}$. حل: چون $x\to 2^-$ پس $x<2$ در نتیجه بازه $(1,2)$ را در نظر بگیرید در این بازه $[x]=1$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]+2}{3-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1+2}{3-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{3-x} = \frac{3}{3-2} = 3$$

مطلوبست محاسبه: $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-1}{[x]-3}$. حل: چون $x\to 4^-$ پس $3<x<4$ در این بازه $[x]=3$ در نتیجه مخرج کسر صفر می‌شود پس بازه $(3,4)$ جزء دامنه نیست در نتیجه حد مورد نظر نیست.

مثال) مطلوبست: $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4}$. حل: چون $x\to 2^-$ پس $x<2$ در نتیجه $(x-2)<0$ در نتیجه $|x-2|=-(x-2)$ حال داریم

$$\dots = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

مثال) مقدار $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-|x|}{[x+1]-x}$ را بیابید. حل: چون $x\to 0^+$ پس $x>0$ لذا $|x|=x$ و $[x+1]=1$ زیرا $x+1$ بین 1 تا 2 قرار میگیرد. در نتیجه

$$\dots = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-x}{1-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$$

مثال مقدار $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x\cdot sgn(x^2-4)}{x^2-5x+1}$ را محاسبه کنید.

حل: $x\to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow x^2>4 \rightarrow x^2-4>0 \Rightarrow sgn(x^2-4)=1$

پس $\dots=\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x\cdot 1}{x^2-5x+1}=\frac{2}{2^2-5(2)+1}=\frac{2}{-5}$

مثال مطلوب: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\left[\frac{1}{x}\right]\right)$. حل: در این تمرین وقتی $x \to 0$ میل می‌کند نمی‌توان $[\frac{1}{x}]$ را حذف کرد اما با توجه به خاصیت جزء صحیح و قضیه فشردگی می‌توان نوشت

$\forall a\in\mathbb{R} \quad a-1<[a]\leq a \Rightarrow (x\neq 0)\ \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \quad , a=\frac{1}{x}$

با ضرب x^2 در طرفین نامساوی بالا داریم

$x-x^2<x^2\left[\frac{1}{x}\right]\leq x$ با فرض

$g(x)=x-x^2 \ , f(x)=x^2\left[\frac{1}{x}\right] \ , h(x)=x$ داریم $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ چون

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim h(x)=0$ طبق قضیه فشردگی: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

تمرینات زیر را حل کنید.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+6)=$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{(x-4)^5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=?$ 5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-5x+4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$ 7) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\tan 4x}$

9) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left((x^2-4)\cdot\cos\frac{1}{x-2}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x}$ 11) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, 3x-x}{5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\left((x^2-4)\sin\frac{1}{x^3-8}\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 3x^2}{x^2\cdot\sin x}$

وقتی رفتار تابع را به صورت $\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)=\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)=\frac{1}{x}\right)=-\infty$ نشان میدهیم

توجه کنید $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی مشخصی نیستند بلکه دو نماد برای رفتار تابع است.

از این به بعد ما هر دو را در مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی مورد بررسی قرار میدهیم

قوانین زیر در محاسبه حدها ظاهر میشوند ($a\in\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} a\times(+\infty)=+\infty \\ a\times(-\infty)=-\infty \end{cases} a>0 \qquad \begin{cases} a+(+\infty)=+\infty \\ a+(-\infty)=-\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} a\times(+\infty)=-\infty \\ a\times(-\infty)=+\infty \end{cases} a<0$$

$$\begin{cases} (+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty \\ (-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty \\ (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty \end{cases}$$

توجه: در مجموعه گسترش یافته اعداد حقیقی، غیر از عمل $\frac{a}{0}$ اعمال زیر مبهم بوده و باید رفع ابهام گردند.

1) $0\times(\pm\infty)$ 2) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 3) $(+\infty)-(+\infty)$ 4) 0^0

5) $1^{\pm\infty}$ 6) $(\pm\infty)^0$

مثال) مقدار $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}$ را بیابید.

حل: داریم $\lim_{x\to 3^-}(2x)=6$ و $\lim_{x\to 3^-}(x-3)=0$ و مخرج از مقادیر منفی به صفر نزدیک میشود زیرا $(x-3)<0$ وقتی $x\to 3^-$ میل میکند

پس حد تابع $-\infty$ میشود. آنگاه به صورت

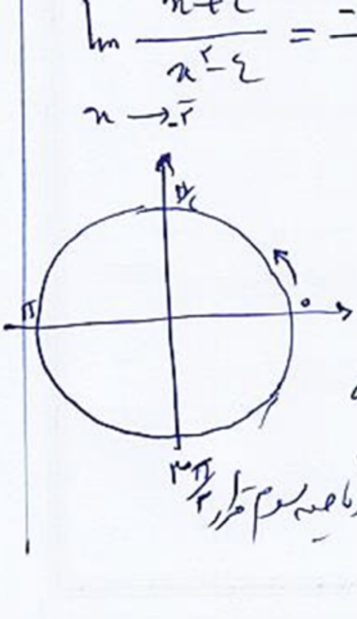
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{(x-3)}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

مثال) مقدار $\lim_{x\to -2^-}\frac{x+4}{x^2-4}$ را بیابید

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x+4}{x^2-4}=\frac{-2+4}{0^+}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

زیرا $x<-2 \Leftarrow x^2>4 \Leftarrow x^2-4>0$

مثال) مقدار $\lim_{\theta\to \frac{3\pi}{2}^-}\tan\theta$ را بیابید.



$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}^-}\tan\theta=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}^-}\sin\theta}{\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}^-}\cos\theta}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

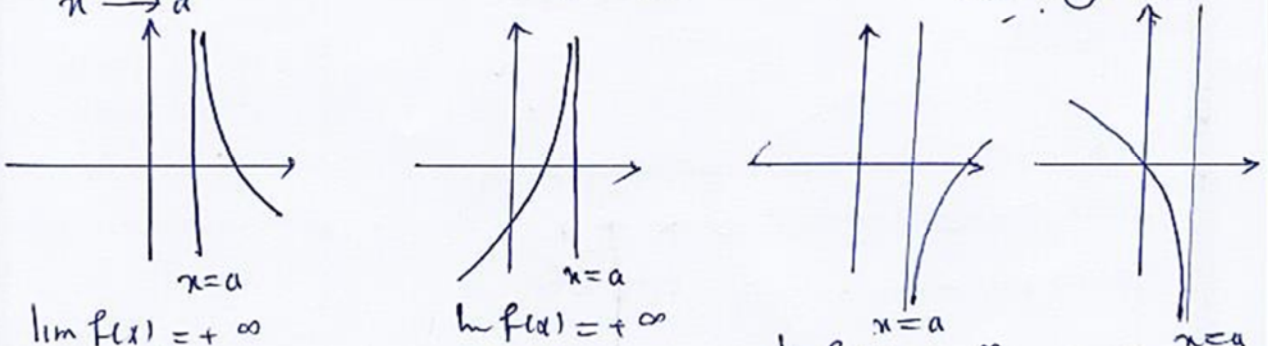
توجه کنید با توجه به شکل وقتی $\theta\to\frac{3\pi}{2}^-$ یعنی $\theta<\frac{3\pi}{2}$ هستند یعنی در ناحیه سوم قرار دارد که در این ناحیه سینوس و کسینوس هر دو منفی هستند.

مجانب قائم : خط $x=a$ را مجانب قائم منحنی نمایش تابع f گویند هرگاه حداقل یکی از حدهای زیر برقرار باشد

1) $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ 2) $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

3) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ 4) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

به این شکل توجه کنید :



$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

مثال) مجانب های قائم تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4}$ را در صورت وجود بیابید

حل : مخرج را مساوی صفر قرار میدهیم $x^2-4=0 \Rightarrow x=2 , x=-2$. چون حد تابع در این دو نقطه $+\infty$ یا $-\infty$ میشود پس منحنی دو خط یعنی $x=2$ و $x=-2$ مجانب های قائم هستند

مثال) مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ را در صورت وجود بیابید.

مخرج را مساوی صفر قرار میدهیم داریم $x+2=0$ یعنی $x=-2$ اما وقتی حد تابع را در $x=-2$ محاسبه می کنیم $\frac{0}{0}$ میشود که پس از رفع ابهام داریم

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

چون حد تابع بینهایت نشد پس تابع مجانب قائم ندارد

مثال) مجانب قائم تابع $f(x)=\sec x$ را بیابید.

حل : فرمول $\boxed{\sec x=\frac{1}{\cos x}}$ $f(x)=\frac{1}{\cos x} \to \cos x=0 \quad x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

که حد تابع در هر کدام از نقاط که به ازای k های مختلف بدست می آید بینهایت میشود پس تابع بی نهایت مجانب قائم دارد. $(k\in\mathbb{Z})$

حد در بی‌نهایت: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. جدول زیر وضعیت تابع را وقتی که x بطور بیکران بزرگ یا کوچک میشود را نشان میدهد.

x	10	100	1000	10000	100000	...	$+\infty$
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...	0

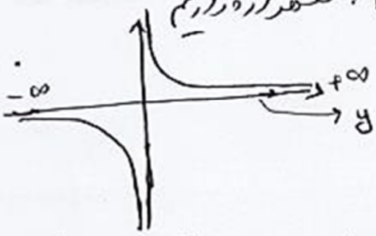
x	-10	-100	-1000	-10000	-100000	...	$-\infty$
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	...	0

با نگاه به جدول بالا می‌بینیم که وقتی x بیکران افزایش یا کاهش می‌یابد مقدار $f(x)$ به صفر نزدیک میشود این مطلب را بصورت زیر نمایش میدهیم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

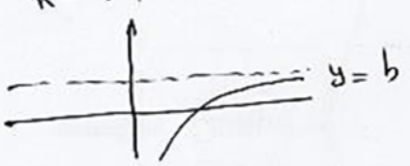
نکته: هرگاه $n\in\mathbb{N}$، همواره داریم

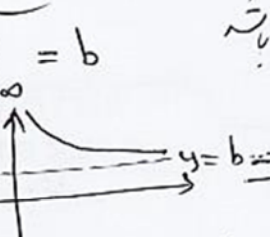
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$$

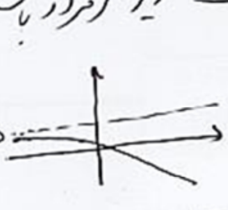


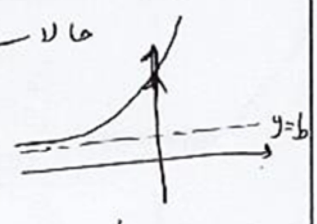
تعریف: خط $y=b$ را مجانب افقی تابع غیرثابت f می‌نامیم اگر حداقل یکی از حالات زیر برقرار باشد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$









مثال) مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را بیابید

حل: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)=\frac{x}{x-1}\right) = 1 \Longrightarrow y=1$ مجانب افقی

حدود نامتناهی در بی‌نهایت: تابع $f(x)=x^3$ را در نظر بگیرید واضح است که اگر x بیکران افزایش یابد مقدار $f(x)$ نیز بیکران افزایش می‌یابد و هرچه x بیکران کاهش یابد آنگاه $f(x)$ نیز بیکران کاهش می‌یابد درچنین حالتی می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

قضیه: هرگاه $p(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد آنگاه حد $p(x)$ وقتی $x \to \pm\infty$ میل کند برابر حد جمله با بیشترین درجه آن است یعنی

$$\lim_{x \to \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + mx + n) = \lim_{x \to \pm\infty} (ax^n)$$

نتیجه: هرگاه $f(x)$ ، $g(x)$ چند جمله‌ای از درجه n باشند داریم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m} = \lim \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & n<m \\ \dfrac{a_n}{b_n} & n=m \\ -\infty \mid +\infty & n>m \end{cases}$$

مثال) حدود زیر را محاسبه کنید

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-5}{3x^3+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{3x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} = 0$

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3-8x}{3x+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3} x^2 = +\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$

5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5-\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-3} = \frac{-\infty}{\infty}$ پس $= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{4x^2}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-|2x|}{|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$

مثال) مجانب‌های افقی توابع زیر را بیابید.

$g(x) = \sqrt{x^2+1} - x \qquad f(x) = \frac{2x}{x^2-3}$

درجه صورت کمتر از درجه مخرج

$f: \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0 \longrightarrow y=0$ مجانب افقی

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(g(x) = \sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} (|x| - x) = \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (x-x) = 0 \longrightarrow y=0 & \text{افقی} \\ \lim_{x \to -\infty} (-x-x) = \lim -2x = +\infty \end{cases}$$

در این حالت مجانب افقی ندارد زیرا حد یک عدد نشد

آیا تابع $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ مجانب افقی دارد؟ چرا.

حل: چون دامنه تابع برای x های $4-x^2>0$ یعنی $-2<x<2$ تعریف شده پس تابع مجانب افقی ندارد زیرا باید متغیر x را سمت $\pm\infty$ میل داد که در اینجا امکان پذیر نیست.

آیا تابع $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ مجانب افقی دارد. حل: دامنه تابع $x>2$ یا $x<-2$ است پس متغیر x را سمت $\pm\infty$ میل داد و باید ببینیم آیا در $+\infty$ یا $-\infty$ تابع حدی برابر یک عدد حقیقی دارد یا نه.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-x}=-2\end{cases}$$

پس تابع دو مجانب افقی به معادله‌های $y=2$ و $y=-2$ دارد.

پیوستگی

تعریف: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

توجه کنید در این تساوی سه شرط وجود دارد ۱) تابع در a مقدار داشته باشد ۲) تابع در a حد داشته باشد ۳) حد تابع با مقدار آن در $x=a$ برابر باشد

نتیجه: اگر یکی از سه شرط گفته شده برقرار نباشد گوییم تابع در $x=a$ ناپیوسته (گسسته) است.

تعریف پیوستگی ۱) تابع f را در $x=a$ پیوسته از راست گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

پیوستگی ۲) تابع f را در $x=a$ پیوسته از چپ گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ و راست داشته باشد آنگاه در نقطه $x=a$ پیوسته است.

مثال) تابع $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ را در نظر بگیرید چون $f(1)$ تعریف نشده پس شرط اول پیوستگی برقرار نیست در نتیجه تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

این تابع در $x=0$ پیوسته است زیرا

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

این تابع در کلیه نقاط $\mathbb{R}$ بجز $x=1$ پیوسته است.

تابع $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$ در $x=1$ نه پیوستگی راست دارد نه پیوستگی چپ زیرا

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$ ، $f(1)=0$

۲۸

مثال) مقادیر a , b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+2bx & x<2 \\ 3 & x=2 \\ -2ax-3b & x>2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد.

قضیه: هرگاه f و g دو تابع پیوسته باشند (در نقطه $x=a$) آنگاه:

الف) $f\pm g$ در $x=a$ پیوسته است. ب) $f\cdot g$ در $x=a$ پیوسته است

ج) $\frac{f}{g}$ در $x=a$ پیوسته است مشروط بر آنکه $g(a)\neq 0$ باشد.

قضیه: تابع چند جمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته است.

— هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

— توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

— تابع $y=\sqrt[n]{x}$ برای nهای طبیعی و زوج در هر نقطه از بازه $(0,+\infty)$ پیوسته است و برای nهای فرد غیر از یک در هر نقطه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

— تابع $f(x)=a^x$ با فرض $a>0$ و $a\neq 1$ در هر نقطه $\mathbb{R}$ و تابع $y=\log_a x$ در هر نقطه از بازه $(0,+\infty)$ پیوسته است.

— اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $f\circ g$ در a پیوسته است.

— تابع f را در فاصله (a,b) پیوسته گویند هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

— تابع f در فاصله $[a,b)$ پیوسته است هرگاه در a پیوستگی راست داشته و در (a,b) پیوسته باشد.

— تابع f در $(a,b]$ پیوسته است هرگاه در (a,b) پیوسته و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

— تابع f در $[a,b]$ پیوسته است هرگاه در (a,b) پیوسته، در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال) بزرگترین فاصله‌هایی را که توابع زیر در آن پیوسته‌اند را مشخص کنید.

الف) $f(x)=[x]$ جواب: هر فاصله به صورت $[n,n+1)$ که $n\in\mathbb{Z}$

ب) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ جواب: در $x=1$ ناپیوسته است ولی این تابع در فاصله‌ی $(1,+\infty)$ و $(-\infty,1)$ پیوسته است.

ج- تابع $y=\frac{3x-1}{4-x^2}$ جواب: در نقاط ریشه‌ی مخرج یعنی $x=2,-2$ ناپیوسته است پس بزرگترین فاصله $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$ پیوسته است.

۱) تابع $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x)-1}$ در چه ناحیه‌ای پیوسته است؟

حل: مخرج را مساوی صفر قرار دهید داریم $\ln x-1=0 \to \ln x=1 \to x=e$

پس دامنه $R-\{e\}$ است در نتیجه تابع در بازه‌های $(-\infty,e)\cup(e,+\infty)$ پیوسته است.

مثال) مقادیر a، b را طوری بیابید که تابع زیر در ناحیه $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x+1}+x & x\le -1\\ 2x-3x^3 & -1<x\le 0\\ 2^{x+2}-b & x>0\end{cases}$$

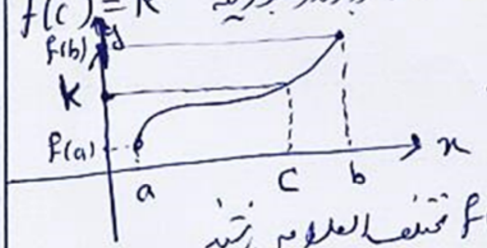
حل: هر یک از ضابطه‌های f به تنهایی بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند بنابراین برای پیوستگی f روی $\mathbb{R}$ باید تابع در نقاط $x=-1$ و $x=0$ پیوسته باشد یعنی:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(2x-3x^3)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2^{x+2}-b)=0 \to 4-b=0$ $\boxed{b=4}$

۲) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-}(ae^{x+1}+x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(2x-3x^3)=f(-1)$

$\Rightarrow a-1=1 \to a=2$

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و K عددی بین $f(b)$، $f(a)$ باشد در این صورت حداقل یک نقطه مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f(c)=K$



نکته: بکمک قضیه مقدار میانی میتوان مکان ریشه‌های معادله‌ای را دقیق‌تر مشخص کرد.

نتیجه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f(c)=0$

مثال ۱) نشان دهید معادله $x^3+x-1=0$ دارای ریشه‌ای در فاصله $(0,1)$ است.

حل: $a=0$ ، $b=1$ ، $f(x)=x^3+x-1$. این چندجمله‌ای در همه $\mathbb{R}$ از جمله $(0,1)$ پیوسته است و $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ بنابراین طبق قضیه مقدار میانی و نتیجه قبل برقرار است. در نتیجه عددی مانند c بین 0 و 1 وجود دارد که $f(c)=0$

"مشتق"

تعریف: فرض کنید f یک تابع و $a \in D_f$، اگر $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، گوییم تابع f در نقطه a مشتق پذیر است. و مقدار حد را با نماد $f'(a)$ نمایش میدهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه a می نامیم.

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با فرض $x-a=h$، $x=a+h$ تعریف دیگر مشتق:

$$f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال) مشتق تابع $f(x)=x^2$ را در نقطه $x=2$ در صورت وجود بیابید.

$f(2)=4$

$$f'(2)=\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x \to 2}(x+2)=4$$

تعریف: هرگاه f یک تابع و $a \in D_f$؛ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=a$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f'_-(a)=\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(مشتق چپ)}$$

$$f'_+(a)=\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(مشتق راست)}$$

نتیجه: با توجه به قضیه‌ای فصل حد، $f'(a)$ موجود است هرگاه $f'_+(a)=f'_-(a)$

مثال) آیا تابع $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ در $x=1$ مشتق دارد؟ جواب: خیر $1 \notin D_f$ پس $f'(1)$ موجود نیست.

مثال) مشتق $f(x)=|x|$ را در $x=0$ را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}=?$$

$$\begin{cases} f'_+(0)=\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x}=1 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x}=-1 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq -1$$

مشتق ندارد

قضیه: اگر f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است.

نتیجه: پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است یعنی اگر تابعی پیوسته نباشد مشتق ندارد.

مثال: آیا تابع $f(x)=[x]$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟ پاسخ: خیر، زیرا در $x=2$ پیوسته نیست

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 1 \\ 2x+1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید

حل: ابتدا پیوستگی را بررسی می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2+2=3 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2(1)+1=3 \qquad f(1)=3 \longrightarrow$$ f در $x=1$ پیوسته است

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(2x+1)-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

$f'_+(1)=f'_-(1)=2$

$f'(1)$ وجود دارد

قوانین مشتق‌گیری: فرض کنید c و n مقادیر حقیقی ثابت و توابع g و h در نقطه x مشتق‌پذیر باشند آنگاه داریم:

1) $f(x)=c \longrightarrow f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

3) $f(x)=c\cdot g(x) \longrightarrow f'(x)=c\cdot g'(x)$

4) $f(x)=g(x)\pm h(x) \longrightarrow f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

5) $f(x)=g(x)\cdot h(x) \longrightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$

6) $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{g'h-h'g}{h^2} \qquad (h(x)\neq 0)$

7) $f(x)=\sin x \longrightarrow f'(x)=\cos x$

8) $f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x$

9) $f(x)=\tan x \longrightarrow f'(x)=1+\tan^2 x$

10) $f(x)=\cot x \longrightarrow f'(x)=-(1+\cot^2 x)$

11) $f(x)=\sin^{-1}x=\operatorname{Arc}\sin x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $f(x)=\operatorname{Arc}\cos x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $f(x)=\operatorname{Arc}\tan x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ، 14) $f(x)=\operatorname{Arc}\cot x \rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

قضیه: مشتق توابع نمایی و لگاریتمی: ($a\neq 1$ ، $a>0$)

1) $f(x)=a^x \longrightarrow f'(x)=(\ln a)\cdot a^x$

2) $f(x)=\log_a x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(\ln a)\cdot x}$

3) $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x$

4) $f(x)=\ln x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ، ($x>0$) (توجه $\ln e=1$)

مثال) مشتق توابع زیر را به کمک قضایا بیابید.

1) $f(x)=e^x\cdot\sin x \longrightarrow f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cos x$

2) $f(x)=e^{-x} \longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{e^x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x)^2}=-\dfrac{1}{e^x}=-e^{-x}$

3) $f(x)=\dfrac{3^x}{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{(\ln 3)\,3^x\cdot x-3^x}{x^2}$

$f(x)=x\cdot\log_2 x \longrightarrow f'(x)=1\cdot\log_2 x+(\cancel{x})\cdot\dfrac{1}{(\ln 2)\cancel{x}}=\dfrac{\ln x}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 2}=\dfrac{1+\ln x}{\ln 2}$

مشتق توابع هیپربولیک:

$f(x)=\sinh x \longrightarrow f'(x)=\cosh x$

$f(x)=\cosh x \longrightarrow f'(x)=\sinh x$

$f(x)=\tanh x \longrightarrow f'(x)=1-\tanh^2 x$

$f(x)=\coth x \longrightarrow f'(x)=1-\coth^2 x$

مشتق تابع مرکب:

$f(x)=(f\circ g)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$

$y=f(u) \longrightarrow y'=u'\cdot f'(u)$ (u تابعی برحسب x)

مثال) مشتق بگیرید

1) $y=e^{2x^3} \longrightarrow \begin{cases} u=2x^3 \longrightarrow u'=6x^2 \\ y=e^u \longrightarrow y'=u'e^u \end{cases} \longrightarrow y'=6x^2\cdot e^{2x^3}$

2) $y=\sin(2x+x^2+1) \begin{cases} u=2x+x^2+1 \longrightarrow u'=2+2x \\ y=\sin u \longrightarrow y'=u'\cdot\cos u \longrightarrow y'=(2+2x)\cos(2x+x^2+1) \end{cases}$

3) $y=\arctan x^2 \begin{cases} u=x^2 \longrightarrow u'=2x \\ y=\arctan u \longrightarrow y'=\dfrac{u'}{1+u^2} \end{cases} \Rightarrow y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$

قضیه: اگر u تابعی از x و $y=u^n$ آنگاه $y'=nu'\cdot u^{n-1}$

مثال

$y=\cos^3 x \to y=u^3 \quad \left| \begin{array}{l} u=\cos x \\ u'=-\sin x\end{array}\right. \to y'=3u'u^2=-3\sin x\cdot\cos^2 x$

$y=\log_2(e^x+x) \to y=\log_2 u \to y'=\dfrac{u'}{(\ln 2)u}$ $\qquad u=e^x+x$, $u'=e^x+1$

$y'=\dfrac{e^x+1}{(\ln 2)(e^x+x)}$

مشتق مراتب بالاتر: مشتق مرتبه n ام $y=f(x)$ را با $f^{(n)}(x)$ یا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ نمایش میدهیم.

مثال) اگر $f(x)=2x^4-3x^2+15$ مطلوبست مشتقات مراتب اول، دوم، سوم، چهارم و ... $f^{(n)}(x)$

$y'=8x^3-6x \qquad y''=24x^2-6 \qquad y'''=y^{(3)}=48x \qquad y^{(4)}=48 \qquad y^{(5)}=0$

$\dots\ y^{(n)}=0\ \dots$

مثال) مشتق مرتبه n ام $f(x)=\dfrac{1}{x}$ را بیابید. حل: $f(x)=x^{-1}$ پس

$f'(x)=-x^{-2} \qquad f''(x)=2x^{-3} \qquad f'''=-6x^{-4} \qquad f^{(4)}(x)=24x^{-5} \qquad f^{(5)}(x)=-120x^{-6}$

نتیجه: در حالت کلی مشتق n ام تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ برابر

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$

مشتق گیری ضمنی: روش اول: در تابع ضمنی y را تابعی مشتق‌پذیر از x فرض کرده و از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم سپس از معادله جدید y' را به دست می‌آوریم. (مثال)

1) $x^2+y^2=4 \longrightarrow 2x+2yy'=0 \longrightarrow 2yy'=-2x \longrightarrow y'=-\dfrac{2x}{2y}=\dfrac{-x}{y}$

2) $x^2y^3=4x \longrightarrow 2xy^3+x^2\cdot(3y'y^2)=4 \longrightarrow y'=\dfrac{4-2xy^3}{3x^2y^2}$

3) $y-\sin(2x+y^2)=5 \longrightarrow y'-(2+2y'y)\cdot\cos(2x+y^2)=0 \longrightarrow$

$y'-2\cos(2x+y^2)-2yy'\cdot\cos(2x+y^2)=0 \qquad y'\left(1-2y\cos(2x+y^2)\right)=2\cos(2x+y^2)$

$\to y'=\dfrac{2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)}$

روش دوم: ابتدا تابع ضمنی را بصورت $F(x,y)=0$ می‌نویسیم. برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ در عبارت $F(x,y)$ یک بار y را ثابت فرض کرده و مشتق F را نسبت به x محاسبه می‌کنیم و آنرا با F_x نمایش می‌دهیم و یک بار دیگر x را ثابت فرض کرده و مشتق F را نسبت به y محاسبه می‌کنیم و آنرا F_y می‌نامیم آنگاه y' از فرمول $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ محاسبه می‌شود.

مثال)

1) $x^2+y^2=4 \longrightarrow F(x,y)=x^2+y^2-4=0 \quad \begin{cases} F_x=2x \\ F_y=2y \end{cases} \longrightarrow y'=-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y}$

2) $x^2y^3=4x \longrightarrow F(x,y)=x^2y^3-4x=0 \quad \begin{cases} F_x=2xy^3-4 \\ F_y=3x^2y^2 \end{cases} \longrightarrow y'=-\frac{2xy^3-4}{3x^2y^2}$

3) $y-\sin(2x+y^2)=5 \longrightarrow F(x,y)=y-\sin(2x+y^2)-5=0$

$$\begin{cases} F_x=-2\cos(2x+y^2) \\ F_y=1-2y\cos(2x+y^2) \end{cases} \longrightarrow y'=-\frac{-2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)}$$

* با روش قبل مقایسه کنید هر دو یکسان است.

مشتق توابع معکوس توابع مثلثاتی:

$f(x)=\arctan x=\tan^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)=\text{arccot}\, x=\cot^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$

$f(x)=\arcsin x=\sin^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=\arccos x=\cos^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

قضیه: مشتق تابع معکوس: اگر تابع f در همسایگی نقطه a پیوسته و یک به یک باشد و $f'(a)$ مخالف صفر باشد آنگاه تابع f^{-1} در نقطه $b=f(a)$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مثال) اگر $f(x)=x^3+x+1$ باشد مطلوبست مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر تابع معکوس f.

حل: طبق تعریف نقطه به طول ۱ روی تابع معکوس برابر نقطه‌ای به عرض ۱ واقع روی خود تابع است پس $y=1$ از اصل معادله $1=x^3+x+1$ نتیجه می‌شود $x=0$ پس $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}$

$f'(x)=3x^2+1 \to f'(0)=1 \to (f^{-1})'(1)=\frac{1}{1}$

مشتق گیری پارامتری: وقتی مسیر حرکت یک متحرک در صفحه تابع نباشد نمی‌توان با بیان مستقیم y برحسب x، مسیر را توصیف کرد در اینجاست مختصات متحرک را با دو معادله به صورت توابعی برحسب متغیر کمکی مانند t می‌نویسیم

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

متغیر t معمولاً برحسب زمان یا زاویه می‌باشد.

برای مشتق‌گیری از توابع پارامتری دو راه وجود دارد

روش اول: با یک سری عملیات t را از دو معادله حذف می‌کنیم تا رابطه‌ای برحسب x و y بدست آید سپس اقدام به مشتق‌گیری می‌کنیم

روش دوم: از فرمول

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

استفاده می‌کنیم

مثال) مشتق تابع پارامتری $\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = 5\sin 3t \end{cases}$ را از هر دو روش بیابید.

روش اول

$$\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = 5\sin 3t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos 3t = \frac{x}{2} \\ \sin 3t = \frac{y}{5} \end{cases} \longrightarrow \cos^2 3t + \sin^2 3t = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$$

$$\Longrightarrow \boxed{1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5}}$$

به کمک مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$y' = -\frac{\frac{2x}{4}}{\frac{2y}{5}} = -\frac{5x}{4y}$$

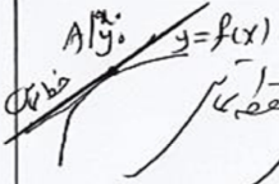
روش دوم

$$\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = 5\sin 3t \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{15\cos 3t}{6\sin 3t} = \frac{15\left(\frac{x}{2}\right)}{6\left(\frac{y}{5}\right)} = \frac{5x}{4y}$$

مثال) در تابع پارامتری $x = t^2 + 2t$ و $y = \sqrt{t+1}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه $t = 3$ بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}}{2t+2} = \frac{1}{4(t+1)\sqrt{t+1}} \xrightarrow{t=3} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4(3+1)\sqrt{3+1}} = \frac{1}{32}$$

کاربردهای مشتق:



① شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن: مشتق به ازای طول نقطه تماس برابر است با شیب خط مماس

$$m_{مماس} = f'(x_0)$$

مثال) معادله مماس بر منحنی $f(x)=x+e^x$ را در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن بنویسید

$x=0 \longrightarrow f(0)=1$ $\quad A\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ نقطه تماس

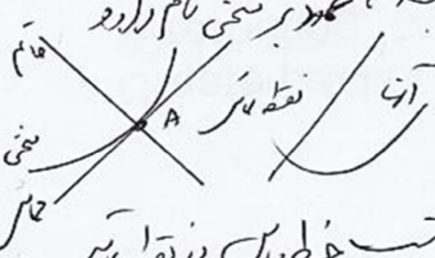
شیب خط مماس

$f'(x)=1+e^x \qquad m=f'(0)=1+e^0=1+1=2$

معادله خط

$y-y_0=m(x-x_0) \longleftarrow y-1=2(x-0) \longleftarrow y=2x+1$ خط مماس

تعریف) خط عمود بر منحنی: خطی که در نقطه تماس بر خط مماس عمود باشد، عمود بر منحنی نام دارد.



شرط عمود بودن دو خط آن است که حاصلضرب شیب‌های آنها برابر (-1) گردد

$$m_{مماس} \times m_{عمود} = -1$$

در نتیجه شیب خط عمود بر منحنی برابر است با عکس و قرینه شیب خط مماس در نقطه تماس

$$\boxed{m_{عمود\ بر\ منحنی} = \frac{-1}{m_{مماس}} = -\frac{1}{f'(x_0)}}$$

مثال) معادله خط قائم بر منحنی $f(x)=x^2+x+1$ را در نقطه $x=1$ بیابید

حل: $y=f(1)=1^2+1+1=3 \longrightarrow A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ نقطه تماس

$f'(x)=2x+1 \longrightarrow m_{مماس}=f'(1)=2(1)+1=3$ شیب مماس $\Rightarrow m'=\frac{-1}{3}$ شیب عمود

$$y-y_0=m'(x-x_0) \Rightarrow y-3=-\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}}$$

مثال) معادله خط‌هایی را بنویسید که موازی خط $y=-2x-1$ بوده و بر منحنی $f(x)=x^2-2x+2$ قائم (عمود) باشد

حل: چون خط با قائم بر منحنی موازی یکدیگرند پس $m=m'$ ← شیب خط برابر $\boxed{m=-2}$

دست بیر شیب خط قائم هم $m'=-2$ در نتیجه شیب خط مماس بر منحنی برابر عکس و قرینه آن است یعنی $m''_{مماس}=\frac{1}{2}$

از طرفی شیب مماس برابر $f'(x_0)$ است که x_0 طول نقطه تماس می‌باشد

$f'(x)=2x-2 \longleftarrow 2x-2=\frac{1}{2} \longleftarrow x=\frac{5}{4} \longleftarrow f(5/4)=y=\frac{17}{16}$

در نتیجه نقطه تماس $A\begin{vmatrix}5/4\\17/16\end{vmatrix}$ چون فقط یک نقطه بدست آمده در نتیجه یک خط بر منحنی قائم است

خط قائم $\quad y-\frac{17}{16}=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)$

خطا، تقریب با دیفرانسیل

فرض کنید $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ مشتق‌پذیر باشد بنابراین داریم

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هرگاه مقدار Δx بسیار کوچک باشد می‌توان تقریب زیر را در نظر گرفت

$$f'(x_0)\cong\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad \Delta y\cong f'(x_0)\cdot\Delta x$$

هم‌چنین می‌توان نوشت:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\cdot\Delta x} \Rightarrow \text{یا} \quad \boxed{f(x_0+\Delta x)\cong f'(x_0)\Delta x+f(x_0)}$$

میزان خطا — مقدار تقریبی تابع

مثال) اندازه یال مکعبی با احتمال خطای اندازه‌گیری $\pm\%0.5$ سانتی‌متر، برابر $60\ cm$ است مقدار تقریبی خطا در محاسبه حجم این مکعب چقدر است:

حل: $x=$ یال مکعب $\rightarrow v(x)=x^3$ حجم $\quad \Delta x=\pm\%0.5\ ,\ x=60$

$$\Delta v\cong v'(x)\cdot\Delta x\rightarrow v'(x)=3x^2\Rightarrow\Delta v\cong 3(60)^2(\pm\%0.5)=\pm 5400\ cm^3$$

یعنی با احتمال خطای $\pm\%0.5$ در یال حجم مکعب حداکثر ۵۴۰۰ سانتیمتر مکعب بیشتر یا کمتر از مقدار واقعی است

مثال) مقدار تقریبی $\sqrt{26}$ را بیابید.

حل: فرض $x=25\ ,\ \Delta x=1\ ,\ f(x)=\sqrt{x}$ ، داریم

$$f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$f(25)=\sqrt{25}=5\ ,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad f'(5)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}\Rightarrow$$

$$f(25+1)=f(26)=\sqrt{26}\cong 5+\frac{1}{10}=5/1$$

مثال) مقدار تقریبی $\sqrt[3]{28/2}$ را بیابید

حل: $x_0=27\ ,\ \Delta x=1/2\ ,\ f(x)=\sqrt[3]{x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f(27)=\sqrt[3]{27}=3\quad f'(27)=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}\Rightarrow f(28/2)=f(27)+f'(27)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[3]{28/2}\cong 3+\frac{1}{27}\times 1/2=3/044$$

مشتق، حدهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ (قاعده هوپیتال)

قضیه: اگر توابع f و g در هر نقطه‌ای از بازه باز I شامل نقطه a مشتق‌پذیر بوده و g' در هر نقطه‌ای این فاصله مخالف صفر باشد و داشته باشیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

عبارت ساده‌تر: اگر مقدار حد $\frac{0}{0}$ شود و شرایط قضیه برقرار باشد آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

قضیه فوق قابل تعمیم برای حدهای $\frac{\infty}{\infty}$ نیز می‌باشد

همچنین در حالت‌های مبهم حد اگر لازم باشد می‌توان از قاعده هوپیتال (قاعده فوق) بیش از یکبار استفاده کرد

حدهای $\infty-\infty$ و $0\times\infty$ را می‌توان با یک سری عملیات جبری به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و سپس کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام کرد.

مثال) تمام حدها $\frac{0}{0}$ هستند که کمک قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{2x-1}=5$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)+1}{2x}=\frac{1}{2}$$

توجه $\ln 1=0$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\frac{1-1}{0+0}=\frac{0}{0}\Rightarrow\dots=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

مثال) حدهای زیر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آیند که به کمک تعمیم قاعده هوپیتال رفع ابهام شده‌اند

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5x+1}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-5}{2}=-\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\sqrt[6]{x}=+\infty$$

قضیه های رل - لاگرانژ، تیلور و مک لورن

(قضیه رل): هرگاه برای تابع f داشته باشیم ① f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته ② f روی (a,b) مشتق پذیر ③ $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک عدد مانند c در بازه (a,b) موجود است که $f'(c)=0$

تعبیر هندسی قضیه رل آن است که در نقاط c_1 و c_2 شیب خط مماس بر منحنی صفر است (توجه: هر خط موازی محور xها دارای شیب صفر است)

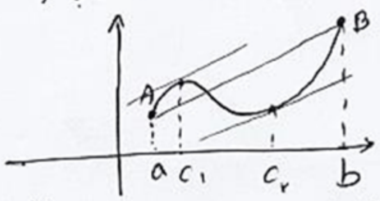
مثال) شرایط قضیه رول را برای تابع $f(x)=x^3-x^2+1$ در فاصله $[0,1]$ بررسی کرده و مقدار c را بیابید.

حل: f چند جمله ای است پس در بازه داده شده پیوسته و در $(0,1)$ مشتق پذیر است. همچنین داریم $f(0)=f(1)=1$ پس طبق قضیه رل $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$

$$f'(x)=3x^2-2x=0 \longrightarrow x(3x-2)=0 \begin{cases} x=0 \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x=\frac{2}{3} \longrightarrow \text{جواب} \end{cases}$$

قضیه لاگرانژ یا قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه حداقل یک عدد مانند c در فاصله (a,b) موجود است بطوریکه

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



توجه: با توجه به شکل تعبیر هندسی قضیه آن است که در نقاط c_1 و c_2 شیب خط مماس بر منحنی برابر شیب خط AB است یعنی خط مماس موازی خط AB است

مثال) شرایط قضیه مقدار میانگین را برای تابع $f(x)=\frac{x}{x+1}$ در بازه $[0,2]$ بررسی کنید

حل: ریشه مخرج $x=-1$ است که $-1\notin(0,2)$ پس تابع همواره پیوسته و مشتق پذیر است در نتیجه عددی مانند $c\in(0,2)$ وجود دارد که $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \longleftarrow$$

$$f(2)=\frac{2}{3} \text{ و } f(0)=0 \implies \frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\frac{2}{3}-0}{2-0} \implies \frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2=3 \longrightarrow x+1=\pm\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{x=\sqrt{3}-1} \quad \text{جواب}$$

قضیه تیلور : فرض کنید تابع f در اطراف نقطه a دارای مشتق از هر مرتبه ای باشد
آنگاه در هر نقطه x در اطراف $x = a$ داریم :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \cdots$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

تابع چندجمله ای فوق را سری تیلور ، بسط تیلور یا سری توانی تابع f نامند

تعریف : سری تیلور تابع f در اطراف $x = 0$ را سری ماکلورن تابع f می گویند

[کالین مک لورن (۱۶۹۸-۱۷۴۶) ریاضیدان اسکاتلندی]

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

مثال : سری ماکلورن تابع $f(x) = \sin x$ را بیابید

حل :

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0 \qquad f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''(0) = -1$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1 \qquad f^{(4)}(x) = \sin x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

مثال : سری مک لورن تابع $f(x) = e^x$ را بیابید.

تمام مشتقات این تابع با خودش برابر است

$$f(x) = e^x \longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow f(x) = e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

مثال ۴ : سری تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(1) = 1 \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f''(1) = 2 \quad , \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \rightarrow f'''(1) = \frac{-6}{1} = -6$$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

مثال) سری تیلور تابع $f(x)=e^{x^2}$ را در نقطه $x=0$ بیابید (سری مک لورن)

حل: کافی است در بسط $f(x)=e^{x}$ به جای x، x^2 را قرار دهیم

$$e^{x^2}=1+(x^2)+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^4}{4!}+\cdots=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots$$

مثال) سری مک لورن $f(x)=\cosh x$ را بیابید.

حل: $\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{2x^6}{6!}+\cdots\right)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

قضیه: اگر تابع f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم

الف) $f'(x)>0$، آنگاه تابع f در این بازه صعودی است.

ب) $f'(x)<0$ آنگاه تابع f در این بازه نزولی است.

تعریف نقطه بحرانی: نقطه $c\in D_f$ را یک نقطه بحرانی تابع f نامند هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال) برای تابع $f(x)=2x-x^2+3$ نقاط بحرانی را بیابید. مشخص کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

حل: $D_f=\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=2-2x \quad f'(x)=0\longrightarrow 2-2x=0$ پس $x=1$ $\quad f'(1)=0$

در نتیجه $x=1$ نقطه بحرانی است

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

f در $(-\infty,4)$ صعودی و در $(4,+\infty)$ نزولی است

قضیه: آزمون مشتق اول: فرض کنید f بر (a,b) پیوسته و c یک نقطه بحرانی این بازه باشد

الف) اگر f' بر (a,c) مثبت و بر (c,b) منفی باشد نقطه $x=c$ ماکزیمم نسبی است

ب) اگر f' بر (a,c) منفی و بر (c,b) مثبت باشد نقطه $x=c$ مینیمم نسبی است

قضیه: اگر تابع f بر (a,b) مشتق پذیر و در نقطه $c\in(a,b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه $f'(c)=0$. (توجه: اکسترمم نسبی یعنی max یا min نسبی)

قضیه آزمون مشتق دوم: اگر تابع f بر بازه ای شامل نقطه c مشتق پذیر باشد

الف: اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ آنگاه f در $x=c$ دارای max نسبی است

ب) اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ باشد آنگاه f در $x=c$ دارای min نسبی است

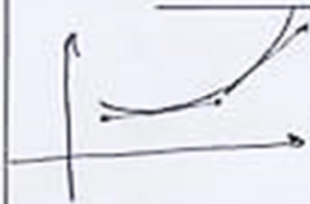
مثال) اکسترمم های نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+5$ را بیابید

$f'(x)=3x^2-3=0 \longrightarrow x=\pm 1$

$f''(x)=6x \longrightarrow f''(1)=6>0 \longrightarrow x=1$ f در $x=1$ مینیمم نسبی دارد

$f''(-1)=-6 \longrightarrow$ f در $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد.

تقعر و نقطه عطف


الف

تعریف: اگر نمودار تابع f در بازه ای مانند I بالای تمام مماس هایش قرار گیرد گوئیم تقعر منحنی در I بسمت بالاست و اگر زیر تمام مماس هایش قرار گیرد گوئیم تقعر منحنی در I بسمت پائین است


ب

قضیه: آزمون تقعر: فرض کنید تابع f بر بازه I دارای مشتق دوم باشد اگر برای هر $x\in I$ داشته باشیم

الف) $f''(x)>0$ آنگاه تقعر نمودار f بر I بسمت بالاست.

ب) اگر $f''(x)<0$ آنگاه تقعر نمودار تابع f بر I بسمت پائین است.

تعریف نقطه عطف: نقطه I واقع بر نمودار تابع f را عطف گویند هرگاه در این نقطه خط مماس موجود بوده و جهت تقعر منحنی تغییر کند

نتیجه: اگر در اطراف نقطه ای مشتق دوم تغییر علامت دهد و در این نقطه خط مماس موجود باشد، آن نقطه عطف است.

اگر در نقطه عطفی بطول c مشتق دوم موجود باشد داریم $f''(c)=0$.

مثال) جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x)=x^3+2x+1$ را بیابید

$f'(x)=3x^2+2 \longrightarrow f''(x)=6x=0 \longrightarrow x=0$ ، $f(0)=1$ نقطه عطف $\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$

$f'(0)=2$ شیب خط مماس موجود دارد

f در $(-\infty,0)$ تقعرش پائین و در $(0,+\infty)$ تقعرش بالا

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$-\infty$ ⌢	1	⌣ $+\infty$

انتگرال

تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه تابع $f(x)$ گویند هرگاه، $F'(x)=f(x)$

از آنجائیکه $(F(x)+c)'=F'(x)$ پس $f(x)$ بیشمار تابع اولیه بشکل $F(x)+c$ دارد (c عدد ثابت)

تعریف: تابع $F(x)+c$ را انتگرال $f(x)$ گویند و با نماد $\int f(x)dx$ نمایش میدهیم و اصطلاحاً آنرا انتگرال نامعین $f(x)$ گویند.

قوانین انتگرال گیری:

۱) $\int dx = x+c$ ۲) $\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$

۳) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ۴) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c \,,\ n\neq -1$

مثال) مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر:

۱) $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6+c$ ۲) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+c$

۳) $\int (u^2-3u+5)du = \int u^2du - 3\int udu + 5\int du = \frac{1}{3}u^3 - 3\times\frac{u^2}{2}+5u+c$

۴) $\int \dfrac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^3+2x^2)x^{-\frac{1}{2}}dx = \int (x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}})dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx + 2\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2\times\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+c$

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر: برای تبدیل انتگرال به انتگرالهای آشنا معمولاً از متغیر دیگر مانند u کمک میگیریم

مثال) مطلوبست $\int (2x-1)^3dx$

حل: $u=2x-1 \rightarrow du=2dx \rightarrow dx=\frac{1}{2}du \Rightarrow \int u^3\times\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^3du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+c = \frac{1}{8}u^4+c \rightarrow \int (2x-1)^3dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4+c$

مثال) $\int x^2(x^3+2)^5 dx = ?$

حل: $u = x^3+2 \longrightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du \Rightarrow$

$\cdots = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18}u^6 + c \rightarrow \int x^2(x^3+2)^5 dx = \frac{1}{18}(x^3+2)^6 + c$

انتگرال گیری از توابع مثلثاتی:

۱) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

۲) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

۳) $\int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + c$

۴) $\int (1+\cot^2 x) dx = -\cot x + c$

مثال

① $\int \cos 2x\, dx = ?$ $\quad u = 2x \quad du = 2dx \quad dx = \frac{1}{2} du$

$\frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

② $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = ?$ $\quad u = \sin x \quad du = \cos x\, dx \Rightarrow$

$\cdots = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2u^2} + c = \frac{-1}{2\sin^2 x} + c$

③ $\int x \sin(x^2+1) dx = ?$ $\quad u = x^2+1 \quad du = 2x\, dx \quad \frac{1}{2} du = x\,dx$

$\rightarrow \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + c = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + c$

④ $\int \sin 2x \cdot \cos^5 2x\, dx = ?$ $\quad u = \cos 2x \rightarrow du = -2\sin 2x\, dx$

$\rightarrow \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} du \Rightarrow \int \sin 2x \cos^5 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int u^5 du = -\frac{1}{12}u^6 + c$

$= -\frac{1}{12}\cos^6 2x + c$

$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

توجه:

$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

مثال) اگر $f'(x)=\sqrt[3]{x+5}$ و $f(3)=15$ ، ضابطه f را بیابید.

$(u=x+5 \quad dx=du) \quad f(x)=\int f'(x)dx=\int \sqrt[3]{x+5}\,dx=\int \sqrt[3]{u}\,du$

$=\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4}+c \qquad f(3)=15 \longrightarrow$

$15=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3+5)^4}+c \longrightarrow c=3 \qquad f(x)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+5)^4}+3$

انتگرال گیری توابع نمایی و لگاریتمی :

1) $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c \qquad$ 2) $\int e^x dx=e^x+c$

3) $\int \frac{dx}{x}=\ln x+c$

مثال) انتگرال‌های زیر را بیابید.

$\int x\cdot 3^{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int 3^u du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^u+c=\frac{3^{x^2+2}}{2\ln 3}+c$

$u=x^2+2 \quad du=2xdx \quad xdx=\frac{1}{2}du$

$\int \frac{e^x}{e^x+3}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|e^x+3|+c$

$u=e^x+3 \longrightarrow du=e^x dx$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء : با توجه به قانون مشتق حاصلضرب دو تابع می‌توان نوشت

مثال) انتگرال‌های زیر را به روش جزء به جزء بیابید.

$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$

① $\int x\sin x\,dx \qquad \begin{cases} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=\sin x\,dx \rightarrow v=-\cos x \end{cases}$

$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c$

② $\int x\ln x\,dx=? \qquad \begin{cases} u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx \rightarrow v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$=\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$

مثال)

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (2x\,dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$

$$\begin{cases} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{cases}$$

یکبار دیگر از جزء به جزء استفاده کردیم $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$

انتگرال گیری به روش تجزیه کسرها: قضیه: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند $\frac{p(x)}{q(x)}$ را گویا گویند

با تجزیه صحیح کسر می‌توان آن را به مجموع دو یا چند کسر گویا نوشت

مثال)

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \quad \text{یا} \quad \frac{x^2-5x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}, \quad \frac{2x^2-3x}{(x+1)^3(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+3}$$

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad \frac{2x^2-7x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

برای پیدا کردن ضرایب A, B, C, ... طرف دوم کسر که مخرج مشترک گیریم و با مساوی قرار دادن صورت کسرهای دو طرف تساوی این مقادیر با تشکیل دستگاه معادلات قابل محاسبه است

برای انتگرال گیری از یک تابع گویا، ابتدا کسر را تا حد ممکن تجزیه کنید سپس انتگرال را بصورت مجموع یا تفاضل چند انتگرال ساده‌تر بنویسید.

مثال)

1) $\int \frac{2x-1}{x+1} dx = \int \left(2 - \frac{3}{x+1}\right) dx = 2x - 3\,\mathrm{Ln}|x+1| + C$

2) $\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = \int \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} dx$

$$\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}$$

صورت کسر بالا را مساوی $5x-1$ قرار دهید

$$5x-1 = (A+B)x + (A-B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ A-B=-1 \end{cases} \to \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\dots = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}\right) dx = 2\,\mathrm{Ln}|x-1| + 3\,\mathrm{Ln}|x+1| + C$$

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر مثلثاتی:

(۱) اگر تابع شامل عبارت $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد از تغییر متغیر $x=a\sin t$ که $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم که در این حالت $dx=a\cos t\,dt$ و $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

(۲) اگر تابع شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ باشد با فرض $x=a\tan t$ که $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ داریم

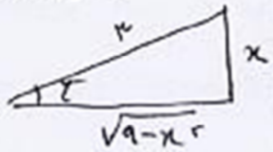
$$dx=a(1+\tan^2 t)dt \quad , \quad \sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$$

(۳) اگر تابع شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد با فرض $x=a\sec t$ که $0\le t<\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\le t<\frac{3\pi}{2}$ استفاده می‌کنیم و

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t.$$

مثال) انتگرال زیر را بیابید.

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx$$



$$\begin{cases} x=3\sin t & dx=3\cos t\,dt \ , \ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin t)^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t} \\ t=\sin^{-1}\frac{x}{3} & \cos t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \end{cases}$$

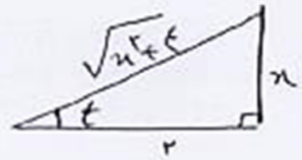
$$=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=\sqrt{9\cos^2 t}=3\cos t$$

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int(3\cos t)(3\cos t)dt=9\int\cos^2 t\,dt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=9\int\frac{1}{2}dt+\frac{9}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}+\frac{9}{2}(\sin t\cos t)$$

$$=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=?$$



$$\begin{cases} x=2\tan t\to dx=2\sec^2 t\,dt \ , \ \boxed{t=\tan^{-1}\frac{x}{2}} \\ \sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2 t+4}=2\sqrt{1+\tan^2 t}=2\sec t \end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{2\sec^2 t\cdot dt}{4\tan^2 t\cdot 2\sec t}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{4u}+C=-\frac{1}{4\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C \qquad \begin{cases} u=\sin t \\ du=\cos t\,dt \end{cases}$$

با توجه به شکل

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه بر این بازه انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال را با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش میدهیم.

قضیه: هرگاه توابع f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند و $k\in\mathbb{R}$ داریم

۱) $\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b-a)$

۳) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

۲) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

۴) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

۵) $\forall x\in[a,b]: f(x)\geq 0 \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

۶) $\forall x\in[a,b]: f(x)\leq g(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

توجه کنید که $\int_a^b f(x)dx$ یک عدد حقیقی است (در صورت وجود).

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و M و m مقادیر max و min مطلق f باشند داریم

$$(\forall x\in[a,b]: m\leq f(x)\leq M \longrightarrow m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه عددی مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد بطوریکه $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$. مقدار $\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ را مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع f بر $[a,b]$ گویند.

نکات:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a\neq b)$$

اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ که $a\leq x\leq b$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق پذیر است و $F'(x)=f(x)$.

دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه برای f باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

در محاسبه انتگرال معین لازم نیست عدد c را بنویسیم زیرا در محاسبه $F(b)-F(a)$ حذف میشود.

مثال) سطح محصور بین منحنی $f(x)=x^2$ و دو خط $x=1$ ، $x=2$ را بیابید

$$S=\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{(2^3)}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

مثال)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0)=1-0=1$

2) $\int_{\ln 4}^{\ln 8}5e^u du=5e^u\Big|_{\ln 4}^{\ln 8}=5\left(e^{\ln 8}-e^{\ln 4}\right)=5(8-4)=5\times 2=10$

$$\int_1^2(2x-1)^3dx=\frac{1}{2}\int_1^3u^3du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4\Big]_1^3=\frac{1}{8}(3^4-1^4)=10$$

$u=2x-1\longrightarrow du=2dx\longrightarrow dx=\frac{1}{2}du$

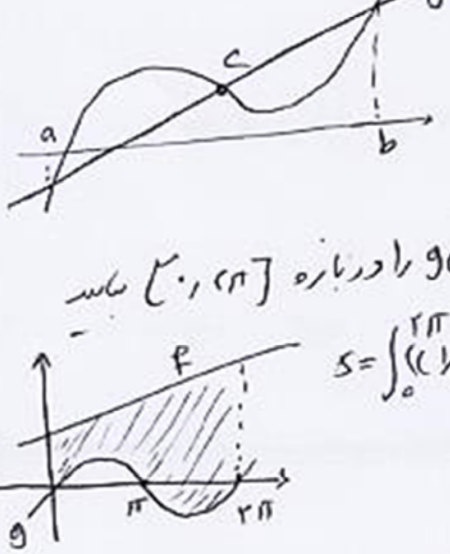
$x=1\longrightarrow u=1$ و $x=2\longrightarrow u=3$

توجه: هنگام استفاده از تغییر متغیر باید حدود متغیر جدید را برای محاسبه انتگرال در نظر بگیرید

محاسبه سطح محصور بین دو منحنی: فرض کنید f و g توابع پیوسته روی $[a,b]$ باشند برای محاسبه سطح محصور بین دو منحنی و دو خط $x=a$ ، $x=b$ داریم:

$$S=\left|\int_a^b(f(x)-g(x))dx\right|$$

تذکر: اگر دو منحنی در نقاطی بین a و b همدیگر را قطع کنند برای محاسبه سطح محصور ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را پیدا کرده سپس مساحت هر قسمت را جداگانه حساب و با هم جمع می‌کنیم



$$S=\int_c^a[f(x)-g(x)]dx+\int_c^b[g(x)-f(x)]dx$$

توجه: مساحت همواره عددی مثبت است

مثال) سطح محصور بین منحنی $f(x)=y=\frac{1}{2}x+1$ و $g(x)=\sin x$ را در بازه $[0,2\pi]$ بیابید

$$S=\int_0^{2\pi}\left((\tfrac{1}{2}x+1)-\sin x\right)dx=\frac{1}{4}x^2+x+\cos x\Big]_0^{2\pi}=(\pi^2+2\pi+1)-(1)=\pi^2+2\pi$$