جزوه درس

ریاضیات مهندسی

تهیه کننده: نعمتی

پاییز ۹۹

ریاضیات مهندسی

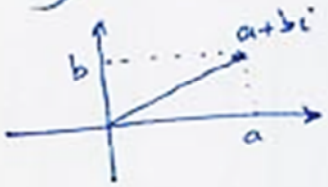
معرفی اعداد مختلط :

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}, i^2=-1\}$$

$z=a+bi$ گوییم a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی عدد مختلط

$a=Re(z)$ $\quad b=Im(z)$

اگر $a=0$ آنگاه z را یک عدد موهومی محض و اگر $b=0$ آنگاه $z=a$ را عدد حقیقی محض گوییم



مثال) قسمت حقیقی و موهومی اعداد مختلط z را بیابید

1) $z=2-3i$ $\quad$ 3) $z=-5$

2) $z=i$ $\quad$ 4) $z=+\sqrt{2}i$

تساوی دو عدد مختلف : اگر $z_1=a_1+b_1i$ و $z_2=a_2+b_2i$ دو عدد مختلف باشند آنگاه $z_1=z_2$ هرگاه $a_1=a_2$ و $b_1=b_2$ و برعکس

مثال) معادله $z^2+(2x+y)i=4-3i$ را حل کنید

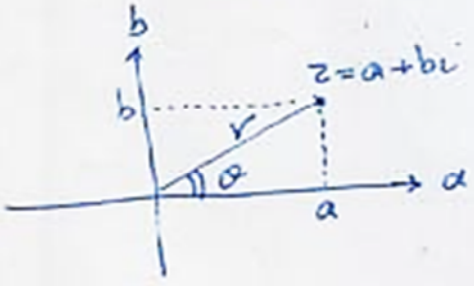
مثال) معادله $(x+y+2)-(y-x+3)i=2x-3iy+4ix-2y-5-10i$ را حل کنید

مثال) نشان دهید معادلات زیر فاقد جواب هستند

1) $\cos x+\sin x+2i(\cos x-\sin x)=1+i$

2) $e^{x+iy}=0$

شکل قطبی اعداد مختلط :



با توجه به شکل

$$\sin\theta=\frac{b}{r} \rightarrow b=r\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r} \rightarrow a=r\cos\theta$$

پس $z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

از طرفی دیگر: $z=re^{i\theta}$ (بعداً ثابت می‌کنیم)

چرخ دوره‌ای توابع $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بر 2π است داریم $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)}$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$ (قدر مطلق یا مدول z) و $\theta=\arctan\frac{b}{a}$ (آرگومان z) $=arg(z)$

مقدار آرگومان z که در بازه $(-\pi, \pi]$ واقع است را آرگومان اصلی گویند و با نماد $Arg(z)$ نمایش میدهیم.

تعیین شکل قطبی اعداد مختلط: اگر $z=a+bi \neq 0$ باشد به ترتیب زیر عمل کنید

۱) a و b را مشخص کنید ۲) $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$ را بیابید

۳) جای نقطه را در صفحه مشخص کنید ۴) اگر نقطه روی محور حقیقی باشد $Arg(z)=0$ یا π

و اگر نقطه بر محور موهومی باشد $\frac{\pi}{2}$ یا $-\frac{\pi}{2}$ $Arg(z)=-\frac{\pi}{2}$ است.

۵) $\alpha = \text{Tan}^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$ که عددی بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است را بیابید

۶) $Arg(z)$ را از جدول زیر تعیین می‌کنیم

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$Arg(z)$	α	$\pi-\alpha$	$-(\pi-\alpha)$	$-\alpha$

مثال) شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید

الف) i ب) -2 پ) $1-i$

حل الف) $Re(i)=0$ $Im(i)=1$ $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$ $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$

$i = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$

حل ب) $Re(-2)=-2$ $Im(-2)=0$ $r=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$ $Arg(-2)=\pi$

$-2 = 2e^{i(\pi+2k\pi)}$

حل پ) $Re(1-i)=1$ $Im(1-i)=-1$ $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ $\alpha=\text{Tg}^{-1}\left|\frac{-1}{1}\right|=\frac{\pi}{4}$

$Arg(z)=-\frac{\pi}{4}$ چون نقطه در ناحیه چهارم

$z=\sqrt{2}e^{(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}$

اعمال روی اعداد مختلط:

جمع $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

تفریق $(a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

ضرب $(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

تقسیم $\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r_1 e^{i\theta_1} \div r_2 e^{i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

نتیجه:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1+\theta_2 = \arg(z_1)+\arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1)-\arg(z_2) \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

مثال: اگر $z_1 = -3-2i$ ، $z_2 = 4+i$ باشد آنگاه

$z_1+z_2 = ?$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = ?$ $\quad \frac{1}{z_1 z_2} = ?$

توان: اگر $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad , \quad \bar{z}^n = \frac{1}{z^n} \; , \; z \neq 0$$

قرار می‌دهیم $\begin{cases} (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$ فرمول دوموآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال: مقدار $(1-i)^3$ و $(1-i)^{-3}$ را بیابید.

$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

مثال: مقدار $(i)^{\frac{1}{3}}$ را بیابید.

مثال: فرمول دوموآور را بسط می‌دهیم $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را بدست آورید.

حل $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\, i - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

طبق تعریف تساوی دو عدد مختلط داریم:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$z = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{z} = \left[r e^{i(\theta+2k\pi)} \right]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n} i}$, $k = 0, 1, \dots (n-1)$

رشته n ام عدد مختلط :

مثال) ریشه سوم عدد ۸ را بیابید.

$z = 8 \longrightarrow z = 8 e^{2k\pi i}$ شکل قطبی

$\sqrt[3]{z} = \left(8 e^{2k\pi i} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{2k\pi}{3}}$ $k = 0, 1, 2$

2 و $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و $2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

مثال مهم: $(2-2i)^{\frac{3}{5}}$ را بیابید. حل: ابتدا $(2-2i)^3$ را ساده می‌کنیم

$(2-2i)^3 = -16 - 16i = \sqrt{512}\, e^{(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)i}$

سپس ریشه پنجم عبارت فوق را تعیین می‌کنیم

$(2-2i)^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt{512}\, e^{(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)i} \right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[10]{512}\, e^{(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5})i}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4 \Longrightarrow$ ریشه تعیین شود

راه دیگر ابتدا $(2-2i)^{\frac{1}{5}}$ را ساده کرده بعد به توان $\frac{3}{5}$ برسانید

مزدوج عدد مختلط: عدد $a-ib$ را مزدوج $a+ib$ گفته و با نماد $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم

$z = a + bi$ $\quad \bar{z} = a - bi$

$\bar{z}$ قرینه z نسبت به محور حقیقی‌ها

$Re(\bar{z}) = Re(z)$ $\quad Im(\bar{z}) = -Im(z)$ $\quad |\bar{z}| = |z|$ $\quad Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$

سایر خواص

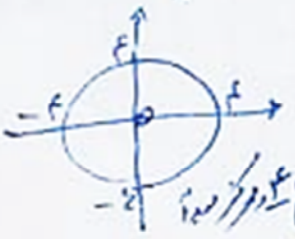
$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ $\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

داریم $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2bi$ $\xrightarrow{\text{Re}}$ $a = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad b = \frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z)$

$z\bar{z} = |z|^2 \leftarrow z\bar{z} = a^2 + b^2$

مثال) ثابت کنید $\left| \frac{(3+7i)^2}{(8-4i)} \right| = \frac{(3-7i)^2}{(8+4i)}$

مثال) مجموعه نقاط z را مشخص کنید $|z| < 2$ و $|z| > 4$



نقاط درون دایره به شعاع ۴ و مرکز مبدأ مختصات

نقاط بیرون دایره

نقاط روی دایره

مثال: مکان هندسی نقاط z را مشخص کنید $2<|z|<4$ و $|z|=4$ و $|z|=2$

حل: چون $|z|$ نامنفی است z از مبدا مختصات به فاصله $|z|=4$ دایره است به مرکز مبدا و شعاع 4
همچنین $|z|<4$ نشان‌دهنده نقاط داخل دایره و $2<|z|<4$ مکان هندسی نقاط واقع بین دو دایره $|z|=4$ و $|z|=2$



توجه: $|z-z_0|=R$ مکان هندسی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R است

(۴) $|z+1|+|z-1|=2a$ برای $a>1$ مکان هندسی نقاطی هستند که مجموع فاصله‌های آن‌ها از -1 و 1 ثابت است.

(۳) $|z+1|=|z-1|$ مکان نقاطی که از دو نقطه 1 و -1 به یک فاصله‌اند
این مکان عمودمنصف پاره‌خط z_1z_2 است که روی محور موهومی است
یعنی $Re(z)=0$ و $Im(z)$ تمام اعداد حقیقی است

(۴) نقاط روی خم $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ به صورت مختلط $z=x+iy=f(t)+ig(t)$ ، $t_1\le t\le t_2$ بیان می‌شود

مثلاً معادلات مثال، $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ که $0\le t\le 2\pi$ به صورت

$$z=2\cos t+2i\sin t$$

مثال‌های گوناگون:

(۱) بخش‌های حقیقی و موهومی $\frac{z+2}{z-1}$ را بدست آورید

حل: $\frac{z+2}{z-1}$ ، $\frac{x+iy+2}{x+iy-1}=\frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy}\times\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}=\frac{(x+2)(x-1)+y^2+i(-3y)}{(x-1)^2+y^2}$

$$Re\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{(x+2)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2}\ ,\ Im\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

(۲) ریشه‌های سوم عدد مختلط $\frac{3+\sqrt{3}i}{1+i}$ را بیابید

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{6}\,e^{-\frac{\pi}{12}i}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{6}\,e^{\left(-\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$$

(۳) نشان دهید که همواره $|Re(z)|+|Im(z)| \le \sqrt{2}|z|$

حل: داریم $z=x+iy$ که $Re(z)=x$ و $Im(z)=y$ پس نشان میدهیم

$|x|+|y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$ (*)

توجه $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

طرفین تساوی (*) را به توان ۲ رسانده و ساده میکنیم

$x^2+y^2+2|x||y| \le 2(x^2+y^2)$

$\Rightarrow (|x|-|y|)^2 \ge 0$ همواره برقرار است

(۴) نشان دهید که $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$

حل $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

یادآوری: $z\cdot\bar{z}=z^2$

$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1$

$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)=2(x_1x_2+y_1y_2)=2Re(z_1\bar{z}_2)$

پس $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$

(۵) نشان دهید اگر $|z|=1$ یا $|w|=1$ باشد آنگاه $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|=1$ مشروط بر $\bar{z}w \neq 1$

حل: اگر $|z|=1$ باشد داریم $|z|^2=z\bar{z}=1$ پس

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|=\left|\frac{z-w}{z\bar{z}-\bar{z}w}\right|=\left|\frac{(z-w)}{\bar{z}(z-w)}\right|=\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|=\frac{1}{|\bar{z}|}=\frac{1}{1}=1$$

زیرا $|\bar{z}|=|z|$

(۶) نشان دهید اگر z_0 یک ریشه چندجمله‌ای $P_n(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ که a_k ها حقیقی باشند آنگاه $\bar{z}_0$ نیز ریشه آنست.

حل z_0 ریشه است پس: $P_n(z_0)=a_nz_0^n+\cdots+a_1z_0+a_0=0$

یعنی $\bar{z}_0$ ریشه $P_n(z)$ است. داریم $\overline{P_n(z_0)}=\overline{a_nz_0^n+\cdots+a_1z_0+a_0}=a_n\bar{z}_0^n+\cdots+a_1\bar{z}_0+a_0=0$

(۷) معادله زیر را حل کنید (x و y اعداد حقیقی هستند)

$$2x-2iy+2ix-5-10i=(x+y+1)-(y-x+3)i$$

$$2x-5-x-y-2+[2iy-2ix+10i-(y-x+3)i]=0$$

$$(x-y-7)-[2iy-2ix+10i-yi+xi-3i]=0$$

$$(x-y-7)-(-2x+2y+7)i=0$$

$$\begin{cases} x-y-7=0 \\ -2x+2y+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-2y-14=0 \\ -2x+2y+7=0 \\ \hline -7=0 \end{array}$$

$x=-7$

۸) شکل کارتزی اعداد مختلط زیر را بنویسید

ا) $z=e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}, r=1$ $\quad x=r\cos\theta=1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$, $y=r\sin\theta=1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1$ $\longrightarrow z=x+iy$, $z=i$

ا) $z=\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad r=\lambda$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ $\quad \begin{cases} x=r\cos\theta=\lambda\times\cos\frac{\pi}{4}=\lambda\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \\ y=r\sin\theta=\lambda\times\sin\frac{\pi}{4}=\lambda\sqrt{2} \end{cases}$ $\quad z=\sqrt{2}+\lambda\sqrt{2}i$

ج) $e^{2+i\pi}=e^{2}\cdot e^{i\pi}$ $\longrightarrow$ [redacted] $\theta=\pi$, $r=e^{2}$ $\quad x=e^{2}\cdot\cos\pi=-e^{2}$, $y=e^{2}\sin\pi=0 \rightarrow z=-e^{2}$

۹) $Arg(z)$ را برای اعداد زیر تعیین کنید

الف) $1-i$ $\quad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ $\quad Arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}$

ب) $(1+i\sqrt{2})(1+i)^{2}=(1+i\sqrt{2})(1-1+2i)=2i(1+i\sqrt{2})=2i-2\sqrt{2}$ $\quad \theta=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{2}=\tan^{-1}(\sqrt{2})$

$Arg(z)=\theta=\frac{\pi}{3}$

۱۰) شکل قطبی اعداد زیر را بنویسید

الف) $-4 \begin{cases} \rightarrow x=-2 \\ \rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow r=4 \quad \theta=\pi$ $\quad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=4e^{i\pi}$ $\quad$ نرم $r=|z|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

ب) $\sqrt{2}i-5-\sqrt{7}i \Rightarrow -5+(\sqrt{2}-\sqrt{7})i$ $\quad r=\sqrt{(-5)^{2}+(\sqrt{2}-\sqrt{7})^{2}}=\sqrt{25+2+7-2\sqrt{14}}=\sqrt{34-2\sqrt{14}}$

دنبال حاصلم

$z=re^{i\theta}$

۱۱) بخش های حقیقی و موهومی تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ را مشخص کنید

$f(z)=\frac{1}{z} \rightarrow f(x+iy)=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^{2}+y^{2}}=\frac{x}{x^{2}+y^{2}}+\frac{-y}{x^{2}+y^{2}}i$

$Re(\frac{1}{z})=\frac{x}{x^{2}+y^{2}}=\frac{\cos\theta}{r}$ $\quad Im(\frac{1}{z})=\frac{-y}{x^{2}+y^{2}}=\frac{-\sin\theta}{r}$

۱۲- بخش های حقیقی و موهومی تابع $f(z)=e^{z}$ را بیابید.

$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y) \Rightarrow Re(e^{z})=e^{x}\cdot\cos y$ $\quad Im(e^{z})=e^{x}\cdot\sin y$

مثال: $e^z + 2 = 0$ را حل کنید

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y \Rightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y + 2 = 0$

① $e^x \cos y + 2 = 0$ ، ② $e^x \sin y = 0 \longrightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \cos y = -1$

(اگر $\cos y = 1$ باشد آنگاه $e^x + 2 = 0$ که جواب ندارد) $e^x (-1) + 2 = 0$ ← $e^x = 2$

$\hookrightarrow x = \ln 2$ ، $\cos y = -1 \Rightarrow y = 2k\pi + \pi$ ، $k = 0, \pm 1, \ldots$

قضیه: حداقل $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ آنگاه $z_0 = x_0 + i y_0$

توابع حقیقی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$ دارای حد باشند

قضیه شرط پیوستگی: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ آنگاه $z_0 = x_0 + i y_0$

توابع حقیقی و شرط $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته باشند

مثال) ثابت کنید تابع $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{e^z + 2}$ در هیچ نقطه‌ای پیوسته است.

حل: توابع چندجمله‌ای صورت و مخرج در تمام نقاط پیوسته‌اند بنابراین تابع $f(z)$ در کلیه نقاط پیوسته است بجز نقاطی که مخرج (در مثال ما بی‌نهایت نقطه) تعیین شده پیوسته است.

مثال) نشان دهید که تابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ در $z = 0$ دارای حد نیست.

روش اول:

$f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{(x - iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$

چون $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ در $z = (0,0)$ صفر است (زیرا حدود مسیر $x = 0$ و $y = 0$ نمایش است) و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ ، اما $\lim_{\substack{x = 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$

بنابراین $f(z)$ در $z = 0$ حد ندارد پس نابیوسته است

روش دوم

$f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$

چون مقدار حد $e^{-2i\theta}$ بستگی به θ دارد پس تابع در $z = 0$ فاقد حد است پس نابیوسته است

مثال) تحقیق کنید تابع $f(z)=\ln r+i\theta$ در هر نقطه مشتق‌پذیر است $(-\pi<\theta<\pi)$

حل: داریم $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta) \Rightarrow u(r,\theta)=\ln r \;,\; v(r,\theta)=\theta$

تابع $u(r,\theta)=\ln r$ در نقاط $r>0$ پیوسته است



فقط در داخل هر قطع مخروطی z بجز نقطه $z=0$

تابع $v(r,\theta)$ در نقاط $\theta\in(-\pi,\pi)$ پیوسته است و تابع $\theta=\pi$ فقط در روی نیم‌خط منفی حقیقی پیوسته نیست

مشتق توابع مختلط. قوانین مشتقگیری توابع حقیقی در توابع مختلط نیز معتبرند. خصوص، شرط لازم وجود و روش مشتق آنند.

مثال) مطلوبست $\lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{2\bar{z}+1}{2z^3+iz^2+2z+i}$ اگر حاصل حد بیکران.

$$\lim_{z\to i}\frac{(2\bar{z}+1)(z-i)}{2z^3+iz^2+2z+i}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{2z^3+iz^2+2z+i}\cdot\lim_{z\to i}(2\bar{z}+1)$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{6z^2+2iz+2}\cdot\lim_{z\to i}(2\bar{z}+1)=\frac{1}{6(i)^2+2i(i)+2}\cdot(2(-i)+1)=\frac{-2i+1}{-6-4+2}=\frac{-2i+1}{-4}$$

$$=\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}$$

مثال) نشان دهید تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای هیچ مشتق‌پذیری ندارد

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0}+\overline{\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$

حد فوق در مسیر $\Delta y=0$ برابر 1 و در روی مسیر $\Delta x=0$ برابر -1 است پس حد فوق در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. $f'(z)$ پس در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

شرایط کوشی-ریمان. قضیه: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=(x_0,y_0)$ دارای مشتق باشد، آنگاه مشتقات نسبی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ نسبت به x و y موجود بوده و در شرایط زیر بنام شرایط کوشی-ریمان صدق می‌کنند

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\;,\;u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

آنگاه $f'(z)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$.

مثال: نشان دهید که $f(z)=z^2$ در کلیه نقاط در شرایط کوشی-ریمن صدق می‌کند.

مشتق تابع را در $z_0=x_0+iy_0$ بدست آورید.

حل: $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_x(x,y)=2x \\ v_y(x,y)=2x \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \qquad \begin{cases} u_y=-2y \\ -v_x=-2y \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x$$

پس تابع در کلیه نقاط در شرایط کوشی-ریمن صادق است. مشتق آن در z_0 برابر است با:

$$f'(z_0)=u_x(z_0)+iv_x(z_0)=2x_0+i(2y_0)=2(x_0+iy_0)=2z_0$$

مثال: نشان دهید تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

$$f(z)=\overline{(x+iy)}=x-iy \longrightarrow \begin{matrix} u(x,y)=x \\ v(x,y)=-y \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} u_x=1 \\ v_y=-1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y=0 \\ u_x=v_y \end{matrix} \quad \text{چون } u_x\neq v_y$$

لذا f در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

شرط کافی برای وجود مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه: اگر $f(z)=u(z)+v(z)$ در یک همسایگی نقطه z_0 تعریف شده و در آن نقطه در شرایط کوشی-ریمن صدق کند و اضافه بر آن در آن همسایگی توابع $u(z)$ و $v(z)$ دارای مشتقات نسبی پیوسته نسبت به x و y باشند آنگاه $f'(z)$ موجود است.

مثال: نشان دهید با وجود آنکه تابع $f(z)=\begin{cases} \frac{x^3+iy^3}{x^2+y^2} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ در شرایط کوشی-ریمن صدق می‌کند ولی در آن نقطه فاقد مشتق است.

حل: $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x^3+i\Delta y^3}{(\Delta x^2+\Delta y^2)(\Delta x+i\Delta y)}$$

در مسیر $\Delta y=0$ مقدار حد برابر 1 و در مسیر $\Delta x=0$ نیز حد برابر 1 است پس تابع در شرایط کوشی-ریمن صدق می‌کند ولی در مسیر $\Delta x=\Delta y$ حد فوق برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین حد در $z\to 0$ موجود نیست یعنی تابع در آن نقطه فاقد مشتق است.

مثال) تحقیق کنید تابع $f(z)=z\bar{z}$ فقط در نقطه $z=0$ مشتق پذیر بوده و مشتق در آن نقطه صفر است.

حل: $f(z)=z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ $\begin{cases}\to u(x,y)=x^2+y^2 \to u_x=2x,\ u_y=2y\\ \to v(x,y)=0 \quad v_x=0,\ v_y=0\end{cases}$

برای اینکه شرط کوشی-ریمان برقرار باشد نیاز است $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ باشد $2y=0$ و $2x=0$

در نتیجه $x=0$ و $y=0$ تنها نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه در شرط کوشی-ریمان صدق می‌کند و علاوه بر آن مشتق در جزئی از یک همسایگی نقطه $(0,0)$ وجود دارد.

$$f'(0)=f'(0,0)=u_x(0,0)+iv_x(0,0)=0$$

مثال) تحقیق کنید تابع $f(z)=x^2+y^2+2xyi$ در چه نقاطی مشتق پذیر است، $f'(-1)$ را محاسبه کنید.

داریم $u(x,y)=x^2+y^2$ $\quad v(x,y)=2xy$

$u_x=2x$, $u_y=2y$ $\quad v_x=2y$ $\quad v_y=2x$

با اعمال کوشی-ریمان باید $2x=2x$ که همواره برقرار است، و $2y=-2y \leftarrow y=0$ که $y=0$

چون مشتقات جزئی در همسایگی نقطه بسته‌اند پس تابع فقط روی خط $y=0$ (محور اعداد حقیقی) دارای مشتق است و

$$f'(z)=f'(x,0)=u_x(x,0)+v_x(x,0)=2x$$

بنابراین $f'(-1)=2(-1)=-2$ و چون $2x$ روی محور اعداد حقیقی نیست، تابع در آن مشتق ندارد.

مثال) تحقیق کنید $f(z)=e^z$ در کلیه نقاط دارای مشتق بوده و مشتق آن برابر خودش است.

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$\Rightarrow u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y$$

$$\begin{cases}u_x=e^x\cos y\\ u_y=-e^x\sin y\end{cases} \qquad \begin{cases}v_x(x,y)=e^x\sin y\\ v_y=e^x\cos y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$$

این شرایط کوشی-ریمان برقرار است. توجه: پیوستگی مشتقات جزئی u و v را نداریم f در کلیه نقاط مشتق پذیر است.

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z=f(z)$$

شرایط کوشی-ریمن در مختصات قطبی:

اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ آنگاه با سه شرایط کوشی-ریمن در مختصات قطبی با فرض پیوستگی مشتقات جزئی u_r، v_r، u_θ، v_θ در یک همسایگی نقطه غیرصفر z، این شرایط معادل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\boxed{u_r=\frac{1}{r}v_\theta \quad و \quad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta}$$

در این صورت مشتق تابع برابر است با: $f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$

مثال: تحقیق کنید تابع $f(z)=\ln r+i\theta$ را در $z\neq 0$، $\theta\in(-\pi,\pi)$ در شرایط کوشی-ریمن صدق می‌کند مشتق تابع را محاسبه کنید.

حل: در صفحه (θ هنوز حروف) بیوستگی را بررسی کردیم با سه مشتق جزئی داریم:

$$u(r,\theta)=\ln r,\quad v(r,\theta)=\theta$$

$$u_r=\frac{1}{r},\quad u_\theta=0,\quad v_r=0,\quad v_\theta=1$$

که در شرایط کوشی ریمان را در مختصات قطبی صدق میکنند.

$$f'(z)=(\frac{1}{r}+0)e^{-i\theta}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{z}$$

تمرین: با استفاده از قاعده لوپیتال درستی حدود زیر را تحقیق کنید

الف) $\lim_{z\to i}\frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}=-\frac{1}{4}$ ⇒ حل $\lim_{z\to i}\frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$ هوپیتال $=\lim_{z\to i}\frac{2z-2i}{4z^3+4z}=\lim_{z\to i}\frac{2(z-i)}{4z(z^2+1)}$

$$=\lim_{z\to i}\frac{2(z-i)}{4z(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{2}{4z(z+i)}=\frac{2}{4i(i+1)}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

ب) $\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{2z^2+(4-4i)z-8i}=\frac{0}{0}$ هوپیتال $\Rightarrow\lim_{z\to 2i}\frac{2z}{4z+(4-4i)}$ جایگذاری $=\frac{2(2i)}{4(2i)+4-4i}=\frac{4i}{4i+4}$

$$=\frac{4i(4-4i)}{(4i+4)(4-4i)}=\frac{12i+16}{32}$$

مثال) فرض کنید $f(z)=(\ln r)^2-\theta^2+2i\theta\ln r$ که در آن $r>0$ و $-\pi<\theta<\pi$

ثابت کنید که $r>0$ و $-\pi<\theta<\pi$ مشتق پذیر است. $f'(z)$ را تعیین کنید

حل: داریم $u(r,\theta)=(\ln r)^2-\theta^2$ و $v(r,\theta)=2\theta\ln r$

ملاحظه کنید $r>0$ یعنی $\ln r$ پیوسته است. چون θ نیز در بازه داده شده پیوسته است در نتیجه $u(r,\theta)$ پیوسته است. به همین دلیل $v(r,\theta)$ نیز پیوسته است.

مشتقات جزئی u و v را محاسبه می‌کنیم

$$u_r=\frac{2}{r}\ln r \qquad u_\theta=-2\theta \qquad v_r=\frac{2\theta}{r} \qquad v_\theta=2\ln r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_r=\frac{2}{r}\ln r=\frac{1}{r}v_\theta \\ -v_r=\frac{-2\theta}{r}=-\frac{1}{r}u_\theta \end{cases}$$

شرایط کوشی ریمان برقرار است. با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری u و v تابع f مشتق پذیر است داریم

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta} \Rightarrow f'(z)\left(\frac{2}{r}\ln r+\frac{i2\theta}{r}\right)e^{i\theta}=\frac{2}{r}(\ln r+i\theta)e^{-i\theta}$$

توابع تحلیلی: مفهوم تحلیلی بودن یک تابع به معنی مشتق‌پذیری در یک حوزه از صفحه مختلط است

تعریف: تابع $w=f(z)$ را در $z=z_0$ تحلیلی نامیم اگر همسایگی از z_0 موجود باشد که در هر نقطه‌ای آن $f(z)$ دارای مشتق گردد. در اینصورت z_0 را یک نقطه عادی تابع می‌نامیم

تابعی که در هر نقطه حوزه R تحلیلی باشد، در R تحلیلی است

تابعی که در کل اعداد مختلط تحلیلی باشد تابع تام نامیده میشود.

نقاط مرزی حوزه‌ای که تابع $f(z)$ در آن حوزه تحلیلی بوده، ولی در خارج آن غیر تحلیلی باشد نقاط منفرد تابع نامیده میشود. بعبارت دیگر: z_0 یک نقطه منفرد تابع $f(z)$ است اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نبوده ولی در همسایگی از z_0 شامل نقاط تحلیلی از تابع گردد.

مثال تحقیق کنید که توابع زیر در چه نقاطی تحلیلی اند، نقاط منفرد آنها را بیابید

۱) $w=\bar{z}$ حل: قبلاً دیدیم که این تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست پس تابع تحلیلی نیست و فاقد نقاط منفرد است.

۲) $f(z)=z.\bar{z}$ حل: قبلاً دیدیم که این تابع در $z=0$ دارای مشتق است پس تابع در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نبوده و فاقد نقطه منفرد است.

پ: $f(z)=x^2+y^2-2xyi$ حل: ابتدا دیدیم که این تابع فقط روی محور اعداد حقیقی دارای مشتق است پس تابع نیز تحلیلی نبوده پس ناقد نقاط منفرد است.

ت: $f(z)=\ln r+i\theta \quad \begin{cases} r>0 \\ -\pi<\theta\leq\pi \end{cases}$ حل: ابتدا دیدیم که این تابع در کلیه نقاط بجز مبدأ و نیم محور منفی محور اعداد حقیقی مشتق پذیر است پس تابع در این ناحیه تحلیلی بوده و نقاط منفرد آن همان نقاطی است که تابع در آنها تحلیلی نیست.

ث) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^4+z}$ حل: تابع داده شده در کلیه نقاط جز ریشه‌های مخرج یعنی نقاط $z=0$ و $z=i$ و $z=-1$ مشتق پذیر بوده پس در کلیه نقاط تحلیلی است و این سه نقطه نقاط منفرد آن هستند.

ج) $f(z)=e^z$ این تابع، در کلیه نقاط تحلیلی است (تابع تام) پس ناقد نقاط منفرد است.

خواص دیگر توابع تحلیلی:

خاصیت اول: اگر بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z)=u(z)+iv(z)$ در حوزه R دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند این بخش‌ها در معادله پتانسیل یعنی $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ صدق می‌کنند

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad , \quad v_{xx}+v_{yy}=0$$

توجه: یک تابع تحلیلی در چه، نه فقط شامل مشتق اول در این نقطه، بلکه شامل مشتقات همه مراتب در آن است که وجود و پیوستگی تمام مشتقات آن را تضمین می‌کند.

تعریف: تابعی که دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته بوده و در معادله پتانسیل صدق کند تابع هارمونیک یا همساز نامیده میشود. خاصیت اول بیان می‌کند که بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z)$ ها هارمونیک هستند.

در اصطلاح $\mathrm{Im}(z)$ را مزدوج هارمونیک $u(x,y)$ گویند.

مثال) نشان دهید قسمت حقیقی تابع e^z یک تابع هارمونیک است.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{\text{قسمت حقیقی}} + i e^x \sin y$$

$$\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$$

$$u_x = e^x \cos y \rightarrow u_{xx} = e^x \cos y$$

$$u_y = -e^x \sin y \rightarrow u_{yy} = -e^x \cos y$$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

چون u_{xx} و u_{yy} در همه نقاط برقرار است پس $\mathrm{Re}(e^z)$ هارمونیک است.

مثال) مزدوج هارمونیک $u(x,y) = 2xy + 2x$ را تعیین کرده و آن را $v(x,y)$ بنامید.

اگر $f(z) = u(z) + iv(z)$ باشد $f(i) = 3i$ ، $f(1)$ را تعیین کرده سپس $f'(1)$ را بیابید.

حل: طبق گفتگوی ریمان باید داشته باشیم $u_x = v_y$ ، $v_x = -u_y$

$$u(x,y) = 2xy + 2x \longrightarrow u_x = 2y + 2 \longrightarrow v_y = 2y + 2 \quad (2)$$

$$u_y = 2x \longrightarrow v_x = -u_y = -2x \quad (1)$$

از روابط (1) و (2) انتگرال بگیرید

$$v = -x^2 + \phi_2(y)$$
$$v = y^2 + 2y + \phi_1(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_2(y) = y^2 + 2y + c \\ \phi_1(x) = -x^2 + c \end{cases} \Rightarrow v(x,y) = y^2 + 2y - x^2 + c$$

لم مزدوج هارمونیک u است. از آنجا:

$$f(z) = (2xy + 2x) + i(y^2 + 2y - x^2 + c) = (2x + 2iy) + 2xy + i(-x^2 + y^2) + ic$$

$$= 2(x + iy) + i(x^2 - y^2 - 2xyi) + ic$$

$$f(z) = 2z - iz^2 + ic \quad (3)$$

حال طبق فرض $f(i) = 3i$ در (3) قرار دهید داریم

$$3i = 2i - i(i)^2 + ic \Leftarrow c = 0$$

پس $f(z) = 2z - iz^2$

$f(1) = 2 - i$

حال $f'(z) = u_x + iv_x$ می‌باشد.

$$f'(i) = u_x(1,0) + iv_x(0,1) = 2 + 2 + i(0) = 4$$

یا داریم

$$f'(z) = 2 - 2iz$$
$$f'(i) = 2 - 2i(i) = 4$$

خاصیت دوم: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی از z در حوزه R باشد آنگاه

خانواده منحنی‌های $u(x,y)=c_1$ و $v(x,y)=c_2$ مسیرهای متعامدند (عمود بر هم)

مثال: تابع $f(z)=x^2-y^2+2xyi$ روی کل اعداد مختلط تحلیلی است.

خانواده منحنی‌ها: $x^2-y^2=c_1$ (هذلولی) و $2xy=c_2$ مسیرهای متعامد یکدیگرند (هم‌گرانیک)

خاصیت سوم: اگر $f(z)=u(z)+iv(z)$ در حوزه R تحلیلی باشد و در این حوزه $f(z)$ ثابت باشد آنگاه $u(z)$ و $v(z)$ توابعی ثابت هستند (یعنی $u(z)$ و $v(z)$ توابعی ثابت باشند) $\Leftarrow$ ثابت

نتیجه: اگر در تابع تحلیلی $f(z)$، توابع $Re(f)$، $Im(z)$، $|f|$، $Arg(f)$ ثابت باشند آنگاه f ثابت است.

مثال: اگر $f(z)=u(z)+iv(z)$ یک تابع تام کوچه‌ور داشته باشیم $u^2=v$ نشان دهید $f(z)$ تابع ثابت است.

حل: چون f تام است پس در کلیه نقاط صفحه مختلط در شرایط کوشی - ریمن صدق می‌کند یعنی:

(۱) $u_y=-v_x$ (۲) $u_x=v_y$

با استفاده از مشتق‌گیری نسبت به x و y از رابطه $u^2=v$ داریم

(۳) $2uu_y=v_y$ و (۴) $2uu_x=v_x$

با قرار دادن روابط ① و ② در ۳ و ۴ نتیجه می‌گیریم

(۵) $2uu_y=u_x$ (۶) $2uu_x=-u_y$

با قرار دادن (۵) در (۶) نتیجه می‌گیریم

$$4u^2u_y=-u_y \Longrightarrow u_y(4u^2+1)=0 \longrightarrow u_y=0 \xrightarrow{\text{از (۵)}} u_x=0$$

با توجه به ۳ و ۴ داریم $v_x=v_y=0$ یعنی توابع u و v نسبت به x و y مشتق‌شان صفر است (نسبت به x و y) بعبارتی دیگر f ثابت است.

سری فوریه: سری فوریه تابع $y=f(x)$ ، $-\rho<x<\rho$ دوره تناوب $T=2\rho$ است.

(۱) $f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos\frac{\pi}{\rho}x+b_1\sin\frac{\pi}{\rho}x)+(a_2\cos\frac{2\pi}{\rho}x+b_2\sin\frac{2\pi}{\rho}x)+\cdots$

(۲) $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\rho}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\rho}x)$

(۳) $a_n=\frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^{\rho}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{\rho}x\,dx$; $n=0,1,2,\ldots$

(۴) $b_n=\frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^{\rho}f(x)\sin\frac{n\pi}{\rho}x\,dx$ $n=1,2,\ldots$

a_n ، b_n را ضرایب اویلر سری فوریه نامند

برهان:

$$\int_{-\rho}^{\rho}\sin\frac{n\pi}{\rho}x\cdot\sin\frac{m\pi}{\rho}x\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \rho & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-\rho}^{\rho}\cos\frac{n\pi}{\rho}x\cdot\cos\frac{m\pi}{\rho}x\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \rho & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-\rho}^{\rho}\cos\frac{m\pi}{\rho}x\,dx=0 \qquad \int_{-\rho}^{\rho}\sin\frac{n\pi}{\rho}x\,dx=0$$

$$\int_{-\rho}^{\rho}\sin\frac{n\pi}{\rho}x\cdot\cos\frac{m\pi}{\rho}x\,dx=0$$

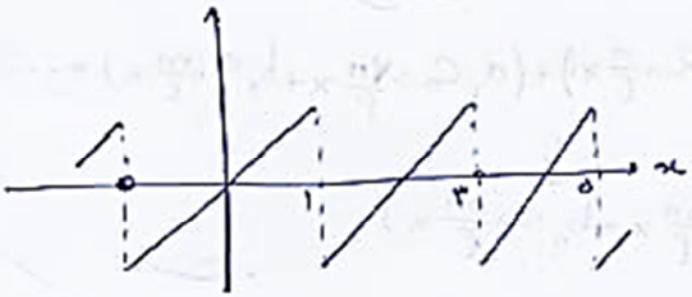
$$\int_{-\rho}^{\rho}f(x)\cdot\cos\frac{m\pi}{\rho}x\,dx=\rho\cdot a_m$$

که با بکار (۳) برابر خواهد.

۱۸

مثال: معادلات سری فوریه زیر

$f(x)=x \quad -1<x\le 1 \qquad P=2$



حل: داریم $P=1$

$$a_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{P}x\,dx \Rightarrow \quad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{P}x\,dx= \quad n=1,2,\dots$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}\underbrace{x\cdot\cos n\pi x}_{\text{فرد}}dx=0 \qquad \text{(توجه: با دوتن جزء بجز انتگرال گیرید)}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}\underbrace{x\sin n\pi x}_{\text{زوج}}dx=2\int_{0}^{1}x\cdot\sin n\pi x\,dx=2\left[\left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right)\Big|_0^1+\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

چون a_nها برابر صفر می‌شد طبق (۲) داریم

$$f(x)=x=\frac{2}{\pi}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin n\pi x$$

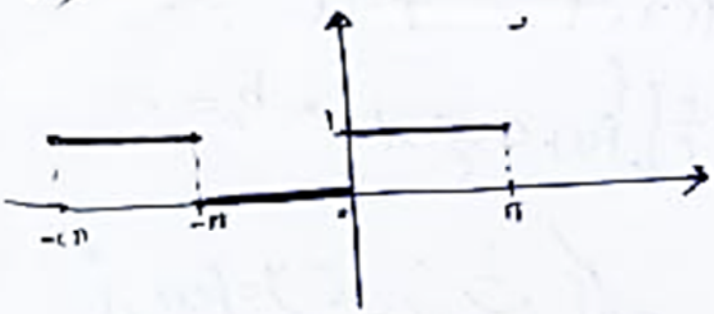
توجه: در بسط فوق اگر $P=\pi$ باشد نیمی دوره‌ای بسط برابر 2π باشد آنگاه داریم

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx$$

(۱۹)

مثال ۲) سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید



حل:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

$p=2\pi$ ، $l=\pi$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}=0 \qquad n\neq 0$$

($f(x)=0$ در $(-\pi,0)$ ، $f(x)=1$ در $(0,\pi)$)

$a_n=0$ ، $n\neq 0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dx=1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin nx$$

مثال ۱) سری فوریه تابع زیر را بیابید

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{2}{\pi}x & -\pi<x<0\\ 1-\frac{2}{\pi}x & 0<x<\pi\end{cases}$$

حل:



$f(x)=f(-x)$ زوج است پس سری فوریه آن تنها شامل جملات کسینوسی است

$p=2\pi$ ، $l=\pi$

بنابراین $b_n=0$ ،

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)\cdot\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)dx=0 \Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\cdot\cos nx$$

(۴۰) نکته: حاصل تابع زوج $y=f(x)$ ، $-l<x<l$ ، $p=2l$ باشد آنگاه،

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x \quad \text{و} \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad \text{و} \quad b_n=0$$

اگر $y=f(x)$ تابع فرد باشد آنگاه $a_n=0$ و

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

پس:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

مسئله: بسط فوریه تابع $f(x)=x-x^2$ ، $-\pi<x<\pi$ ($p=2\pi$) را بیابید.

حل: $l=\pi$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos n\pi\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$

(زوج بودن تابع انتگرال گرفته شده)

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=4\times\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Longrightarrow a_n$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\cdot\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

(فرد = ۰)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\,dx=-\frac{2\pi^2}{3}$$

پس:

$$f(x)=\frac{-\pi^2}{3}+4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots\right)+2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right]$$

نکته: هرگاه $-l<x<l$ ، تابع $y=g(x)$ ، $p=2l$ باشد آنگاه

$$\int_a^{a+2l}g(x)\,dx=\int_{-l}^{l}g(x)\,dx$$

(۴۱)

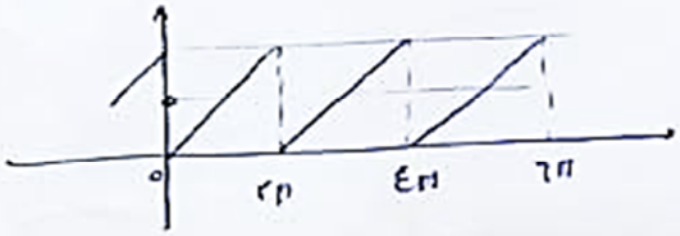
نکته: تابع $y=f(x)$ ، $a<x<a+2l$ با دوره تناوب $2l$ به ازای شرایط دیریکله سری فوریه عبارت است از:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

که در این صورت:

$$a_n=\frac{1}{p}\int_a^{a+2p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{p}\int_a^{a+2p} f(x).\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

مثال سری فوریه $f(x)=x$ ، $0<x<\pi$ با دوره تناوب $p=2\pi$ را بیابید.



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$n\neq 0$

$a_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx=2\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2}{n}$$

$$b_n=\frac{-2}{n}$$

$$f(x)=\pi-2\left(\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right)$$

تابع نمایی: تابع e^z را که مهمترین توابع آنالیز مختلط است بصورت زیر تعریف می‌کنیم

(1) $\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\sin y)}$ (توجه: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$)

توجه کنید که وقتی z یک متغیر حقیقی است (یعنی $y=\mathrm{Im}(z)=0$) آنگاه این تابع با تابع e^x منطبق است.

نتیجه: $\boxed{(e^z)' = e^z}$ این یک تابع تام است.

تابع e^z دارای دوره تناوب $2\pi i$ است زیرا

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^z$$

پس این تابع یک به یک نیست زیرا بعد از تشکیل دایره $z=0$ و $z=2\pi i$ یک مقدار برای z تعیین می‌شود.

نکته:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad , \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

توابع مثلثاتی: اکنون ما در تعریف توابع مثلثاتی $\sin z$ و $\cos z$ روابط $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ و $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$ تعیین می‌شود. با گسترش این تعاریف در صفحه مختلط داریم

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} \qquad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

چون توابع e^{iz} و e^{-iz} توابعی تام هستند نتیجه می‌گیریم که $\cos z$ و $\sin z$ نیز توابعی تام می‌باشند.

با مشتق‌گیری مستقیم از $\sin z$ داریم

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz}+ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بعبارت دیگر مرسوم در مشتق‌گیری توابع حقیقی $\sin x$ و $\cos x$ در مشتق تابع $\sin z$ و $\cos z$ نیز برقرار است.

$$\boxed{(\cos z)' = -\sin z \quad , \quad \sin z = \cos z}$$

از طرفی برای توابع $\tan z$ و $\cot z$ و $\sec z$ و $\csc z$ داریم:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad , \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

مثال: بخش حقیقی و موهومی تابع $\cos z$ را تعیین کنید

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y}\cdot e^{ix} + e^{y}\cdot e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x - i e^{y}\sin x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos x\,(e^{-y}+e^{y}) + i\sin x\,(e^{-y}-e^{y})\right]$$

$$= \cos x\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = \cos x\cdot\cosh y - i\sin x\cdot\sinh y$$

در نتیجه:

$$Re(\cos z) = \cos x\cdot\cosh y \qquad Im(\cos z) = -\sin x\cdot\sinh y$$

به همین ترتیب میتوان گفت:

$$Re(\sin z) = \sin x\cdot\cosh y \,, \quad Im(\sin z) = \cos x\cdot\sinh y$$

مثال: صفرهای تابع $\cos z$ را بیابید.

حل: نقاطی که در آن‌ها $\cos z = 0$ باشد را صفرهای تابع گویند. داریم

$$\cos z = \cos x\cdot\cosh y - i\sin x\cdot\sinh y = 0 \Rightarrow$$

با توجه به اینکه حقیقی و موهومی تابع توأماً صفر باشند

$$\begin{cases} \cos x\cdot\cosh y = 0 \xrightarrow{\cosh y \neq 0} \cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0 \\ \sin x\cdot\sinh y = 0 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \sinh y = 0 \end{cases}$$

از $\cos x = 0$ نتیجه میشود که $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ و از $\sinh y = 0$ نتیجه میشود که $y = 0$ پس چون $z = x+iy$

در نتیجه برای $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ برای کلیه k صحیح حاصل شده است

مثال: تحقیق کنید تابع $\sec z$ در چه نقاطی تحلیلی است، نقاط منفرد آن را به دست آورید و مشتق تابع را محاسبه کنید. $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ تابعی که برای آن بدین شکل داریم

چون نقاطی که در آن‌ها $\cos z$ تحلیلی است در مثال قبل صفرهای $\cos z$ را $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ محاسبه کردیم. این نقاط، نقاط منفرد تکین هستند، پس در هر نقطه بجز این نقاط تحلیلی است.

$$(\sec z)' = \left(\frac{1}{\cos z}\right)' = \frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sec z\cdot\tan z$$

نکته: میتوان گفت صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ همان صفرهای توابع حقیقی $\sin x$ و $\cos x$ یعنی $z = k\pi$ و $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ هستند

نکته ۱: مشتقات کلیه توابع مثلثی مانند توابع حقیقی می‌باشد و دوره تناوب آن نیز همین است.

نکته ۲: تمام خواصی که در این توابع در رشته حقیقی برای متغیرهای مختلف نیز معتبر است

مثال: ثابت کنید $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left[e^{2iz} + e^{-2iz} - 2e^{iz}\cdot e^{-iz}\right] +$$

$$\frac{1}{4}\left[e^{2iz} + e^{-2iz} + 2e^{iz}\cdot e^{-iz}\right] = -\frac{1}{4}e^{2iz} - \frac{1}{4}e^{-2iz} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{4}e^{-2iz} + \frac{1}{2} = 1$$

توابع هذلولوی: این توابع مانند توابع حقیقی $\cosh x$ ، $\sinh x$ تعریف می‌شوند

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

اعداد های زیر را با استفاده از تعاریف میتوان نتیجه گرفت.

$$\cosh iz = \cos z \;,\quad \sinh iz = i\sin z \;,\quad \cos iz = \cosh z \;,\quad \sin iz = i\sinh z$$

یادآوری:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \;,\quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \;,\quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \;,\quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

بعلاوه می‌کلیه روابط مثلثاتی برای توابع هذلولوی تعریف شده آنکه در این روابط به جای z و $\cos z$ ، $\sin z$ ترتیب $\cosh z$ ، $i\sinh z$ را جایگزین کنیم.

مثال: بسط $\cosh(z_1 + z_2)$ را تعیین کنید

راه حل: $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$ بین کسینوس $\cos z$ و $\cosh z$ و $\sin z$ ، $i\sinh z$ را جایگزین کنیم

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cdot \cosh z_2 + \sinh z_1 \cdot \sinh z_2$$

مثال: کشش حقیقی و موهومی تابع $\cosh z$ را تعیین کرده و سپس $|\cosh z|$ را محاسبه کنید

$$\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cdot \cosh iy + \sinh x \cdot \sinh iy$$
$$= \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y$$
$$u = \mathrm{Re}(\cosh z) = \cosh x \cdot \cos y \qquad v = \mathrm{Im}(\cosh z) = \sinh x \cdot \sin y$$

$$|\cosh z| = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\cosh^2 x \cdot \cos^2 y + \sinh^2 x \cdot \sin^2 y}$$
$$= \sqrt{\cosh^2 x (1-\sin^2 y) + (\cosh^2 x - 1)\cdot \sin^2 y}$$
$$= \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y}$$

تابع لگاریتم: داریم $z = re^{i\theta}$ پس

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} re^{i\theta} = \operatorname{Ln} r + \operatorname{Ln} e^{i\theta} = \operatorname{Ln} r + i\theta$$

بنابراین تابع لگاریتم برای $z \neq 0$ تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i \cdot \arg z$$

آرگومان

پس $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln} z) = \arg z$ موهومی، $\operatorname{Re}(\operatorname{Ln} z) = \ln|z|$ حقیقی (زیرا $r = |z|$)

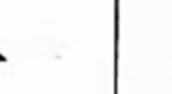
بنابراین تابع لگاریتم نسبت به تغییر آرگومان حساس بوده و یک تابع چندمقداری است.

مثال) مقادیر $\operatorname{Ln}(1+i)$ ، $\operatorname{Ln}(-2)$ ، $\operatorname{Ln} i$ را بیابید.

$\operatorname{Ln}(1+i) = ?$ $\quad |z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ، $\theta = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

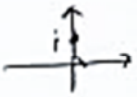
$$\operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{Ln}(-2) = ?$ $\quad -2 = -2 + 0i \longrightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 2$ $\quad \theta = \pi$



$$\operatorname{Ln}(-2) = \operatorname{Ln} 2 + i(\pi + 2k\pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{Ln}(i) = ?$ $\quad i = 0 + 1i$ $\quad |z| = |i| = \sqrt{1} = 1$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$



$$\operatorname{Ln} i = \operatorname{Ln} 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

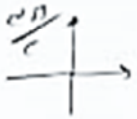
توجه: تابع $\operatorname{Ln} z$ معکوس بخشی از تابع e^z را بیان می‌کند، $-\pi < y \leq \pi$ ($y = \arg(e^z)$)

هشدار: در بکاربردن قواعد لگاریتم حقیقی در تابع $\operatorname{Ln} z$ باید هوشیار باشیم چون روابط $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ ؛ $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ تنها در برخی از اعداد مختلط برقرار است.

مثال) نشان دهید $\operatorname{Ln}(i-1)^2 \neq 2\operatorname{Ln}(i-1)$

$$\operatorname{Ln}(i-1)^2 = \operatorname{Ln}(-2i) = \operatorname{Ln}|-2i| + i\operatorname{Arg}(-2i) = \operatorname{Ln} 2 - i\frac{\pi}{2}$$
$$2\operatorname{Ln}(i-1) = 2\left(\operatorname{Ln}|i-1| + i\operatorname{Arg}(i-1)\right) = 2\operatorname{Ln}\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i$$

($\operatorname{Arg}(i-1) = \frac{3\pi}{4}$ زیرا $\operatorname{Arctg}\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$)



در همه حال روابط $\operatorname{Ln} z^n = n\operatorname{Ln} z$ ، $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ، $\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ برقرار است

تابع توانی : اگر $z \neq 0$ و a یک عدد مختلط باشد تابع توان z^a را تعریف می‌کنیم

$$z^a = e^{a \ln z}$$

چون $\ln z$ چند مقداری است پس در حالت کلی z^a نیز چند مقداری است. چون z^a ترکیب دو تابع تحلیلی است خود آن نیز یک تابع تحلیلی می‌گردد و یک قاعده زنجیری داریم :

$$(z^a)' = a z^{a-1}$$

مثال) با استفاده از تعریف تابع توانی کلیه مقادیر i^{-i} و $i^{\sqrt{2}}$ و $i^{\frac{1}{3}}$ و i^{-3} را بیابید.

حل : $i^a = e^{a \ln i} = e^{a(\ln|i| + i \arg i)} = e^{a(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$ داریم

پس $i^{-3} = e^{-3(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i} = e^{(-\frac{3\pi}{2} - 6k\pi)i} = e^{-\frac{3\pi}{2}i}$ برای هیچ k که یک مقدار حاصل می‌شود

$i^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i} = e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ برای $k = 0, 1, 2$ سه مقدار حاصل می‌شود

$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$ و $i^{-i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

به ازای k های مختلف تمایز، مقادیر متمایز حاصل می‌شود.

تعریف کلی : اگر z یک عدد مختلط غیر صفر باشد آنگاه z^a :

الف) برای a صحیح غیر صفر، یک مقداری است

ب) برای $a = \frac{m}{n}$ گویا، n مقداری و مقادیر آن روی یک دایره واقعند

پ) برای a اصم، دارای بینهایت مقدار است و مقادیر آن روی یک دایره واقعند

ت) برای a غیر حقیقی، دارای بینهایت مقدار است و مقادیر آن روی یک مارپیچ قرار دارند