

مسئله حل شده با روش دیرانسی خطی مرتبه دوم

۱) $y'' - 3y' + 2y = 0$

۱- جواب عمومی معادلات دیرانسی باید

$t^2 - 3t + 2 = 0$ معادله منفر $\Rightarrow (t-2)(t-1) = 0 \rightarrow t_1 = 2, t_2 = 1 \Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

۲) $y'' - 3y' = 0$ معادله منفر $\Rightarrow t^2 - 3t = 0 \cdot t(t-3) = 0 \cdot t_1 = 0, t_2 = 3 \rightarrow y = c_1 + c_2 e^{3x}$

۳) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$ معادله با شرایط اولیه را حل کنید

معادله منفر $t^2 + 3t + 2 = 0 \rightarrow (t+1)(t+2) = 0 \rightarrow t_1 = -1, t_2 = -2 \rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$y(0) = 0 \rightarrow 0 = c_1 e^0 + c_2 e^0 \rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$
 $y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} \xrightarrow{y'(0)=2} \boxed{2 = -c_1 - 2c_2}$ $\left. \begin{matrix} c_2 = -2 \\ c_1 = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ جواب

۴) $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 3, y'(0) = -7$

معادله منفر $t^2 - 4t + 4 = 0 \cdot (t-2)^2 = 0 \rightarrow t_1 = t_2 = 2$ $\xrightarrow{\text{تکرار}}$

$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} \rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} \left\{ \begin{matrix} y(0) = 3 \rightarrow \boxed{c_1 = 3} \\ y'(0) = -7 \rightarrow \end{matrix} \right.$
 $y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$
 $\boxed{-7 = 2c_1 + c_2} \xrightarrow{c_1 = 3} \boxed{c_2 = -12} \Rightarrow y = 3(1 - 4x) e^{2x}$ جواب

۵) $y'' + 5y' + 4y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

معادله منفر $t^2 + 5t + 4 = 0 \cdot (t+2)(t+4) = 0 \rightarrow t_1 = -2, t_2 = -4$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x} \rightarrow y' = -2c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-4x}$

$\boxed{1 = c_1 + c_2} \cdot \boxed{2 = -2c_1 - 4c_2}$ $\xrightarrow{\text{شرایط اولیه}}$

$c_1 = 5, c_2 = -4 \Rightarrow y = 5e^{-2x} - 4e^{-4x}$ جواب

معادله دیرانسی خطی مرتبه دوم ممکن به فرم $y'' + ay' + by = 0$ باشد که در آن a و b اعداد حقیقی هستند.

۱) $y'' + 3y' = 0$ معادله منفر $t^2 - 3t = 0 \cdot t_1 = 0, t_2 = 3 \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{3x}$

$\boxed{y'' - 3y' = 0}$ معادله منفر $t^2 - 3t = 0 \cdot a = -3, b = 0$ در فرم

ب) $e^{-x}, xe^{-x}, y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} \Rightarrow$

$t_1 = t_2 = -1$ (تغیض)، $y'' + 2y' + y = 0$ جواب

تبدیل کنیم فرض $t = t + 1$ در نظر $(t+1)^2 = 0$ $t^2 + 2t + 1 = 0$ $a=1, b=2$

ع) $e^{2x}, e^{-x} \rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \rightarrow c_1 = c_2 = 1, t_1 = 2, t_2 = -1$

$(t+1)(t-2) = 0 \rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow a = -1, b = -2 \rightarrow y'' - y' - 2y = 0$ جواب

شکل (جواب عمومی با دو حالت در نظر بگیرد)

۱) $y'' + 2y' + 2y = 0$

$t^2 + 2t + 2 = 0$ $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ $t = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$p = -1, q = 1 \rightarrow y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) \Rightarrow y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

۲) $y'' + y' + 2y = 0$ $t^2 + t + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7$ $t = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \rightarrow p = -\frac{1}{2}, q = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = e^{-\frac{x}{2}} (c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x)$

با دو حالت به شرایط اولیه در نظر بگیرد

۱) $y'' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 9$

$t^2 + 9 = 0, t^2 = -9 \rightarrow t_1 = \pm 3i \rightarrow p = 0, q = 3$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \rightarrow y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$

$y(0) = 2 \rightarrow 2 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \rightarrow \boxed{2 = c_1}$ $y'(0) = 9 \rightarrow 9 = -3c_1 \sin 0 + 3c_2 \cos 0 \rightarrow 9 = 3c_2 \rightarrow \boxed{c_2 = 3}$

جواب $y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x$

$$۲) y'' - 4y' + 4y = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0 \quad t_1 = t_2 = 2 \quad \text{تک‌گانه}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} \rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} \rightarrow y' = c_2 e^{2x} + 2(c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

$$\text{شرایط اولیه} \quad (y(0) = 3, y'(0) = -4)$$

$$3 = (c_1 + c_2 \cdot 0) e^{2 \cdot 0} \rightarrow \boxed{3 = c_1}$$

$$\downarrow$$

$$-4 = c_2 e^{2 \cdot 0} + 2(c_1 + c_2 \cdot 0) e^{2 \cdot 0}$$

$$-4 = c_2 + 2c_1 \rightarrow -4 = c_2 + 6 \quad \boxed{c_2 = -10}$$

$$\text{پس } y = (3 - 10x) e^{2x}$$

$$۳) y'' + y' + 3y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad \text{شرایط اولیه}$$

$$\text{معادله: } t^2 + t + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 < 0 \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$$

$$p = -\frac{1}{2} \quad q = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x)$$

$$y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x) +$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow c_2 = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x} (-\frac{\sqrt{11}}{2} c_1 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x + \frac{\sqrt{11}}{2} c_2 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x)$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\sqrt{11}}{11} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x$$

$$۴) f(t) = t \cdot \sin t$$

این تابع را برای تبدیل لاپلاس

$$L(t \cdot \sin t) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$\text{یعنی } L(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)$$

$$L(f(t)) = L(\sin t) = \frac{a}{s^2 + a^2} \Rightarrow$$

$$* L(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

بنابراین برای تبدیل $L(t \cdot \sin t)$ در رابطه $s-1$ قرار می‌دهیم

$$۵) f(t) = (1 + e^t)(1 - e^{-t}) \Rightarrow f(t) = 1 \cdot e^{-t} + e^t \cdot e^{-t} - e \cdot e^{-t} = e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1$$

$$L(f(t)) = L(e^t - e^{-t}) = L(e^t) - L(e^{-t}) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = \frac{2}{s^2-1}$$

خاصیت خطی بودن

از فرمول (۳)