حالت دوم: اگر $f(x)$ در معادله دیفرانسیل $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ به فرم $f(x)=n(x)e^{px}$ باشد که $n(x)$ چندجمله‌ای از درجه n است آنگاه y_p را به فرم $y_p=x^m e^{px}$ (چندجمله‌ای از درجه n) انتخاب می‌کنیم و m تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مفسر است. (این قانون برای ترکیب دلخواه n شرط صادق است)

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''-4y'+4y=5e^{2x}$$

را بنویسید

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر یعنی $y''-4y'+4y=0$ را پیدا می‌کنیم

معادله مفسر آن $t^2-4t+4=0$ است که $t_1=t_2=2$ (ریشه مضاعف) چون $p=2$ دوبار ریشه‌ی معادله مفسر می‌باشد باید y_p را به صورت $y=Ax^2e^{2x}$ انتخاب کنیم $y_h=(c_1+c_2x)e^{2x}$

و برای تعیین A باید y_p و y'_p و y''_p را در معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=5e^{2x}$ قرار دهید

$$y_p=Ax^2e^{2x}\longrightarrow y'_p=2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}=2Ae^{2x}(2x+2x^2)$$

$$y''_p=2Ae^{2x}(2x^2+4x+1)$$

در معادله همگن $\Rightarrow$ $2Ae^{2x}(2x^2+4x+1)-4Ae^{2x}(2x+2x^2)+4Ax^2e^{2x}=5e^{2x}$

$$\Rightarrow 2A=5 \qquad \boxed{A=\frac{5}{2}}\longrightarrow y_p=\frac{5}{2}x^2e^{2x}$$ داریم $y_h=(c_1+c_2x)e^{2x}$

$$\Rightarrow y=y_p+y_h=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{5}{2}x^2e^{2x}$$ جواب کلی معادله

حالت سوم: اگر $f(x)$ در معادله دیفرانسیل $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ به فرم $f(x)=m(x).\cos qx+n(x)\sin qx$ باشد و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند قانون کلی زیر را خواهیم داشت که $y_p=x^m(R(x)\cos qx+S(x)\sin q(x))$ که در آن m تعداد ریشه‌های $\pm iq$ معادله مفسر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای کامل از درجه n می‌باشد و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است. (این قانون را به ترکیب دلخواه n شرط صادق است)

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y=3\cos 5x$ را بنویسید (حل در صفحه بعد)

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم $t^2+4=0 \Rightarrow t=\pm 2i$ و

$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ برای تعیین y_p چون $5i$ ریشه معادله مشخصه نیست پس $m=0$ و

$y_p = A\cos 5x + B\sin 5x$ برای پیدا کردن B, A باید y_p و y_p'' را در معادله قرار دهیم $y_p' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$ و $y_p'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$ در نتیجه

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 4(A\cos 5x + B\sin 5x) \equiv 3\cos 5x$$

$$-21A\cos 5x - 21B\sin 5x \equiv 3\cos 5x$$

اتحاد وقتی برقرار است که:

$-21A = 3 \to A = -\frac{1}{7}$ ، $-21B = 0 \to B = 0$ در نتیجه

$y_p = -\frac{1}{7}\cos 5x$ پس جواب کلی شد $y = y_h + y_p$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{7}\cos 5x$$

مثال) فقط فرم جواب خصوصی معادله $y'' + 4y = x^2\sin 2x$ را بیابید.

حل: معادله مشخصه $t^2+4=0 \Rightarrow t=\pm 2i$ و چون $+2i$ یکبار ریشه معادله مشخصه است بنابراین y_p به فرم

$$y_p = x\left[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\sin 2x\right]$$

حالت چهارم: اگر در $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ ، $f(x)$ به فرم

$f(x) = e^{px}[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx]$ و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند

تا فرم کلی y_p را خواهیم داشت: $\boxed{y_p = x^m e^{px}[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx]}$ ، که m تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مشخصه و $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای عمومی از درجه n باشند و n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

(درجه این قانون برای ریشه دوگانه n نیز صادق است.)

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$y''' + y'' = e^x\cos x$$

حل: معادله مشخصه $t^3 + t^2 = 0$ بدست می‌آید

$t_1 = t_2 = 0$ ، $t_3 = -1$ ریشه‌های معادله مشخصه در نتیجه

$y_h = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$ و با توجه به قانون کلی فوق $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$ حالا باید

y_p و y_p' و y_p'' و y_p''' را در معادله اولیه قرار دهیم تا A و B تعیین شوند

(ادامه در صفحه بعد)

$$y_p = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_p' = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + e^{x}(-A\sin x + B\cos x) = e^{x}[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x]$$

$$y'' = e^{x}[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x - (A+B)\sin x + (B-A)\cos x] = e^{x}[2B\cos x - 2A\sin x]$$

$$y''' = 2e^{x}[B\cos x - A\sin x - B\sin x - A\cos x] = 2e^{x}[(B-A)\cos x - (A+B)\sin x]$$

در معادله اولیه قرار میدهیم

$$e^{x}(-4A\sin x - 2A\cos x + 2B\cos x - 2B\sin x) = e^{x}\cos x$$

ضرایب جملات مشابه در دو طرف تساوی باید یکسان باشد

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -2A + 4B = 1 \end{cases} \longrightarrow A = -\frac{1}{10} \qquad B = \frac{1}{5}$$

و جواب عمومی برابر است

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 + c_1 x + c_2 e^{-x} + e^{x}\left(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right)$$

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x}\sin x$$

حل $t^2 - 4t + 5 = 0$ معادله مشخصه $\Rightarrow (t = 2 \pm i)$ ریشه‌های معادله مختلط

جواب عمومی معادله همگن متناظر را می‌نویسیم

$$y_h = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

و

$$y_p = x e^{2x}[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$$

حال باید y_p و y_p' و y_p'' را در معادله اولیه مسئله جایگزین کنیم

$$e^{2x}[4Cx\cos x + 2(A+D)\cos x - 4Ax\sin x + 2(C-B)\sin x] = e^{2x}(x+2)\sin x$$

ضرایب جملات مشابه در دو طرف تساوی باید یکسان باشد

$$\begin{cases} C = 0 \\ A + D = 0 \\ -4A = 1 \\ 2(C-B) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0, \quad A = -\frac{1}{4} \\ D = \frac{1}{4} \quad B = -1 \end{cases}$$

و جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x e^{2x}\left[\left(-\frac{1}{4}x - 1\right)\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right]$$

«تبدیلات لاپلاس»

تعریف: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که $0\le t<\infty$ تابعی است به صورت $L(f(t))=F(s)$ که بشکل

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cdot f(t)\,dt$$

مثال) اگر $f(t)=e^{2t}$ در انصورت

$$L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{2t}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(2-s)t}\cdot dt=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2-s}\left(e^{(2-s)b}-1\right)=\frac{1}{s-2}\ ,\ s>2$$

مثال) لاپلاس تابع $f(t)=t$ را بدست آورید.

$$L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}\cdot t\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cdot t\cdot dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^b$$

$\Rightarrow L(t)=\frac{1}{s^2}\ ,\ s>0$

تعریف: تابع $f(t)$ را تکه‌ای پیوسته به ازای $t\ge 0$ گویند هرگاه:

۱) f در نقاط متناهی $0\le t_1<t_2<\dots<t_k$ ناپیوسته باشد

۲) f بر بازه‌های باز $(0,t_1)$ و (t_1,t_2) و ... و (t_k,∞) پیوسته باشد

۳) حدود چپ و راست f در t_i متناهی باشد.

تعریف: تابع $f(t)$ را مرتبه نمایی گویند هرگاه عدد مثبت و ثابت M، C وجود داشته باشد و $T>0$ بطوریکه:

$|f(t)|\le M\cdot e^{ct}\ ,\ t\ge T$

مثال) توابع $f(t)=t$ و $f(t)=3\sin t$ و $f(t)=5e^{-2t}$ از مرتبه نمایی هستند زیرا

$|t|\le e^{t}\ ,\ |3\sin t|\le 3e^{t}$ و $|5e^{-2t}|\le 5e^{t}$

نکته: اگر $f(t)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و برای $t\ge 0$ از مرتبه نمایی برای اعداد مثبت C و $t\ge T$ باشد در انصورت $L(f(t))$ به ازای $s>c$ وجود دارد.

لاپلاس توابع خاص:

۱) $L(1)=\frac{1}{s}$ ۲) $L(k)=\frac{k}{s}$ ۳) $L(e^{at})=\frac{1}{s-a}$

۴) $L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$ ۵) $L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}$

بقیه در صفحه بعد ⟸

۲۳ ۶) $L(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$ ۷) $L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$

۸) $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ۹) $L(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-\frac{3}{2}}$

خواص تبدیلات لاپلاس:

۱- خطی بودن $L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

۲- اگر $L(f(x)) = F(s)$ آنگاه، $L(e^{ax} \cdot f(t)) = F(s-a)$

۳- اگر $L(f(x)) = F(s)$ آنگاه، $L(t^n \cdot f(t)) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$

مثال)

۱) $L(\sin t \cdot \cos t) = L(\frac{1}{2}\sin 2t) = \frac{1}{2}L(\sin 2t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4}$

۲) $L(e^{-2t} \cdot t^3) = \frac{3!}{(s+2)^4}$

۳) $L(t^{5/2}) = L(t^2 \cdot \sqrt{t}) = (-1)^2 \cdot \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot s^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\, s^{-\frac{7}{2}}$

۴) اگر $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ موجود و متناهی باشد آنگاه

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} L(f(t))\, ds$$

مثال) میدانیم $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ بنابراین داریم

۱) $L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{\infty} L(\sin t)\, ds = \int_s^{\infty} \frac{ds}{s^2+1} = \lim_{b\to\infty} \arctan s \Big|_s^b = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$

مثال) میدانیم $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$ پس

۲) $L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = \int_s^{\infty} L(1-\cos t)\, ds = \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) ds =$

$\lim_{b\to\infty} \left(\ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1)\right) ds = -\ln \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$

۵) اگر $L(f(t)) = F(s)$ در اینصورت $L\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s} L(f(t)) = \frac{1}{s} F(s)$

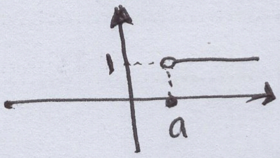
26

مثال) $L\left(\int_0^x t\sin t\,dt\right) = \frac{1}{s}L(t\sin t) = (-1)\frac{1}{s}\frac{d(L(\sin t))}{ds} = -\frac{1}{s}\cdot\left[\frac{1}{s^2+1}\right]' = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

مثال) $L\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right) = \frac{1}{s}L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right)$

لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای: تابع پله واحد در نقطه $x=a$ را با $u(x-a)$ یا $u_a(x)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$u_a(x)=u(x-a)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x>a\end{cases}$$



قضیه: اگر $F(s)=L(f(x))$ به ازای $s>a\geq 0$ موجود باشد و اگر $a>0$ ثابت، در این صورت:

$$L(f(x-a)u(x)) = e^{-ax}\cdot F(s) \qquad s>a$$

مثال) مقدار $L(u(x-\pi))$ را بیابید.

حل: $\begin{cases}f(x)=1\\ a=\pi\end{cases} \Rightarrow L(u(\pi)) = e^{-\pi s}\cdot L(1) = \frac{e^{-\pi s}}{s}$

مثال) تابع $g(x)=\begin{cases}0 & x\leq 1\\ e^x & x>1\end{cases}$ را در نظر بگیرید مقدار $L(g(x))$ را بدست آورید.

حل: $g(x)=e^x\cdot u(x-1) \xrightarrow{e^x=f(x-1)} f(x)=e^{x+1}$

$$L(g(x)) = L(e^x\cdot u(x-1)) = e^{-s}L(e^{x+1}) = e\cdot\frac{e^{-s}}{s-1}$$

نکته مهم: اگر داشته باشیم $g(x)=\begin{cases}f_1(x) & 0<x<a\\ f_2(x) & a<x<b\\ \vdots & \\ f_3(x) & b<x<c\\ \vdots & \vdots\end{cases}$ در این صورت داریم:

$$g(x)=f_1(x)+(f_2(x)-f_1(x))u(x-a)+(f_3(x)-f_2(x))u(x-b)+\dots$$

مثال) اگر $f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\\ \sin x & x\geq 2\pi\end{cases}$ در این صورت $L(f(x))$ را بیابید.

حل: با توجه به نکته فوق داریم

$$f(x)=x+(0-x)u(x-\pi)+(\sin x-0)u(x-2\pi) \Rightarrow$$

$$L(f(x)) = L(x)+L(-x\cdot u(x-\pi))+L(\sin x\cdot u(x-2\pi))$$

$$=\frac{1}{s^2} - e^{-\pi}\cdot L(x+\pi) + e^{-2\pi s}\cdot L(\sin(x+2\pi)) = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

مثال) اگر $g(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ e^{x-1} & 1<x<2\\ x-2 & 2<x<3\end{cases}$ در اینصورت $L(g(x))$ را بیابید

حل $g(x)=1+(e^{x-1}-1)u(x-1)+((x-2)-e^{x-1})u(x-2)$

$$L(g(x))=L(1)+L(e^{x-1}-1)u(x-1)+L((x-2)-e\cdot e^{x-2})u(x-2)$$

$$=\frac{1}{s}+e^{-s}\cdot L(e^{x}-1)+e^{-2s}\cdot L(x-e\,e^{x})=\frac{1}{s}+e^{-s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)+e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e}{s-1}\right)$$

«تبدیل معکوس لاپلاس»

اگر $L(f(x))=F(s)$ تبدیل معکوس تبدیل لاپلاس را با نماد L^{-1} نمایش میدهند

که $L^{-1}(F(s))=f(x)$ که دارای خواص زیر است.

(۱) خطی بودن $L^{-1}(c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+\dots+c_nF_n(s))=c_1L^{-1}(F_1(s))+c_2L^{-1}(F_2(s))+\dots$

$\dots+c_nL^{-1}(F_n(s))$

(۲) اگر $L^{-1}(F(s))=f(x)\Longrightarrow L^{-1}(F(s-a))=e^{ax}\cdot L^{-1}(F(s))$

مثال) مقدار لاپلاس معکوس را بیابید:

$$L^{-1}\left(\frac{6}{(s-5)^4}\right)=e^{5x}\cdot L^{-1}\left(\frac{6}{s^4}\right)=e^{5x}\cdot x^3$$

مثال) لاپلاس معکوس زیر را بیابید

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2-9}\right)=L^{-1}\left(\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2-9}\right)=e^{-2x}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right)=e^{-2x}\left(\cosh 3x-\frac{2}{3}\sinh 3x\right)$$

(۳) اگر $f(x)=L^{-1}(F(x))$ در اینصورت

$L^{-1}(F(s))=-\frac{1}{x}L^{-1}(F'(s))$ یا $L^{-1}(F'(s))=-xL^{-1}(F(s))$

مثال) مقدار لاپلاس معکوس عبارت زیر را بیابید

الف) $L^{-1}(\arctan s)=-\frac{1}{x}L^{-1}[(\arctan s)']=-\frac{1}{x}\cdot L^{-1}\frac{1}{1+s^2}=-\frac{1}{x}\cdot\sin x$

ب) $L^{-1}\left(\ln\frac{s}{s^2+1}\right)=L^{-1}(\ln s-\ln(s^2+1))=-\frac{1}{x}L^{-1}[(\ln s-\ln(s^2+1))']$

$$=-\frac{1}{x}L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\right)=-\frac{1}{x}(1-2\cos x)$$

ج) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) = -\frac{1}{2}L^{-1}\left(\left(\frac{1}{s^2+4}\right)'\right) = -\frac{1}{2}x\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

$= \frac{1}{4}x\, L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{1}{4}x\cdot \sin 2x$

۴) اگر $f(x)=L^{-1}(F(s))$ آنگاه

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot F(s)\right)=\int_0^x L^{-1}(F(s))\,dx$$

مثال) لاپلاس معکوس عبارت زیر را بیابید.

الف) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3+s}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right) = \int_0^x L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)dx$

$= \int_0^x \sin x\,dx = 1-\cos x$

ب) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+4)}\right) = \int_0^x L^{-1}\frac{1}{s(s^2+4)}\,dx$

$= \int_0^x \frac{1}{4}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

۵) اگر $f(x)=L^{-1}(F(s))$ آنگاه

$$L^{-1}(F(s)\cdot e^{-as}) = f(x-a)u(x-a)$$

مثال) لاپلاس معکوس عبارت زیر را بیابید.

الف) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}e^{-5s}\right) = f(x-5)u(x-5) = e^{2(x-5)}\cdot u(x-5)$

ب) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}e^{2s}\right) = u(x+2)f(x+2) = u(x+2)\cosh(x+2)$

ج) $L^{-1}\left(e^{-as}\cdot \text{arc}\cot(s-1)\right) = u(x-a)\cdot f(x-a)$

$\Rightarrow f(x) = L^{-1}(\text{arc}\tan(s-1)) = -\frac{1}{x}L^{-1}\left(\frac{1}{1+(s-1)^2}\right) = \frac{1}{x}e^{x}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{x}e^{x}\cdot\sin x$

در اینصورت داریم

$L^{-1}\left(e^{-as}\cdot \text{arc}\cot(s-1)\right) = \frac{1}{x-a}\cdot\sin(x-a)u(x-a)$

نکته: در محاسبه $L^{-1}(F(s))$ اگر $F(s)$ کسری باشد به کمک تجزیه کسرها به مجموع چند کسر تبدیل کنید و با توجه به خاصیت خطی بودن L^{-1} جواب نهائی را بیابید.

(مثالها در صفحه بعد)

مثال) معکوس لاپلاس عبارت $\frac{1}{s^2+5s-6}$ را بیابید

$$\frac{1}{s^2+5s-6}=\frac{1}{(s+6)(s-1)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+6}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5s-6}\right)=\frac{1}{7}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+6}\right]=\frac{1}{7}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s+6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{7}\left(e^{x}-e^{-6x}\right)$$

مثال) لاپلاس معکوس را بیابید

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)$$

داریم

$$\frac{s+1}{s^2(s-1)}=-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-1}$$

پس $L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)=L^{-1}\left(-\frac{2}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right)=-2-x-2e^{x}$

قضیه: اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه

$$L(f'(x))=sL(f(x))-f(0) \quad و \quad L(f''(x))=sL(f'(x))-f'(0)=s^2L(f(x))-sf(0)-f'(0)$$

تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به کمک لاپلاس

فرض کنید $y''+ay'+by=R(x)$ یک معادله دیفرانسیل باشد از طرفین تساوی لاپلاس بگیرید

$$L(y'')+aL(y')+bL(y)=L(R(x))$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+a(sL(y)-y(0))+bL(y)=F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+as+b)L(y)=F(s)+sy(0)+y'(0)+a(y(0))$$

$$L(y)=\frac{F(s)+s\cdot y(0)+y'(0)+a(0)}{s^2+as+b}=\frac{G(s)}{s^2+as+b}\Rightarrow y=L^{-1}\frac{G(s)}{s^2+as+b}$$

مثال) به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y''-5y'+6y=0 \qquad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

حل: $L(y'')-5L(y')+6L(y)=0\Rightarrow s^2L(y)-s(y(0))-y'(0)-5sL(y)+5(y(0))+6L(y)=0$

$$(s^2-5s+6)L(y)=1\Rightarrow L(y)=\frac{1}{s^2-5s+6}\Rightarrow y=L^{-1}\frac{1}{s^2-5s+6}$$

$$=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right)=-\frac{1}{5}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+L^{-1}\frac{1}{s-3}\right]=-\frac{1}{5}e^{2x}-\frac{1}{5}e^{3x}$$

مسأله $y' - y = f(t)$ را حل کنید که $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ -1 & t \ge 1 \end{cases}$ با فرض $y(0) = 0$

حل: با توجه به قضیه صفحه ۲۴ و نکته آن داریم

$$f(t) = 1 + (-1-1)u(t-1)$$

$$f(t) = 1 - 2u(t-1) \Rightarrow L f(t) = L(1) - 2L(u(t-1)) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$$

حالا برای حل معادله $y' - y = f(t)$ از طرفین آن لاپلاس میگیریم

$$L(y') - L(y) = L(f(t)) \Rightarrow s \cdot L(y) - y(0) - L(y) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} \Rightarrow$$

$$(s-1)L(y) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{s(s-1)}e^{-s} \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{s(s-1)}e^{-s}\right] = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s-1)}\right)$$

$$y = e^{t} - 1 - 2(e^{t-1} - 1)u(t-1)$$

مجموعه مسائل: لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید

۱) $f(t) = e^{t} \cdot \sin t$

۲) $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t < \pi \\ t & t \ge \pi \end{cases}$

۳) $f(t) = (1+e^{t})(1-e^{-t})$

۴) $f(t) = e^{5t-1} + 4\sin t$

۵) $f(t) = e^{2t}(1 - \cos t)$

۵) $f(t) = 3e^{-2t} + 2t^{3} - 5$

لاپلاس معکوس بدست آورید

۱) $L^{-1}\dfrac{s-4}{(s+1)(s^{2}+4)}$

۲) $L^{-1}\left(\dfrac{s}{s^{2}-6s+13}\right)$

۳) $L^{-1}\left(\dfrac{2s+10}{s^{2}+12s+40}\right)$

۴) $L^{-1}\left(\dfrac{-e^{-3s}}{s(s^{2}+1)}\right)$

والسلام