

جزوه درس

معادلات دیفرانسیل

استاد: رحمت اله نعمتی

کاری از دانشجو: سامان جندقی

اردیبهشت ۹۲

*معادله ی ایفرانسیل

رابطه ای است بر حسب متغیر مستقل x و متغیر وابسته y (y تابعی از x) و مشتقات تابع نسبت به x یک معادله ی دیفرانسیل نام دارد. در یک معادله ی دیفرانسیل وجود x و y ضرورتی ندارد. اما حداقل یکی از مشتقات باید وجود داشته باشد که بتوان آن را معادله ی دیفرانسیل نامید.

*مرتبه ی معادله

بالاترین مرتبه ی مشتق موجود در یک معادله مرتبه ی معادله نام دارد.

$$x^2 y' + 4y = \sin x \rightarrow \text{مرتبه ی اول}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \rightarrow \text{مرتبه ی دوم}$$

$$y'' + \frac{2}{x}y' = 3x^2 \rightarrow \text{مرتبه ی سوم}$$

جواب معادله

تابع y را جواب یک معادله ی دیفرانسیل می نامیم ، هرگاه در آن معادله صدق کند. یعنی اگر خودش و مشتقش را در معادله جاگذاری کنیم تساوی برقرار باشد. برای هر معادله بر مبنای مرتبه ی آن به همان تعداد جواب داریم.

*جواب معادله

#تعریف جواب عمومی و خصوصی

هر معادله ی دیفرانسیل یک جواب عمومی دارد که این جواب شامل پارامتر C است که چنین جوابی را جواب عمومی می نامیم. در شرایطی که معادله ی دیفرانسیل شامل یک شرط اولیه باشد با جایگذاری این شرط در جواب عمومی پارامتر C مقدار خاصی به دست می آید که چنین جوابی را جواب خصوصی می نامیم.

مثال : معادله با شرط اولیه داده شده را حل کنید.

$$y' = \cos x, y(0) = 5$$

انتگرال می گیریم



$$\int y' dy = \int \cos x dx \rightarrow y = \sin x + c$$

جواب عمومی

$y(0) = 5$



$$5 = \sin 0 + c \rightarrow c = 5 \rightarrow y = \sin x + 5$$

جواب خصوصی



فرمول های مشتق (یادآوری)

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = ax \rightarrow y' = a$$

$$y = a \rightarrow y' = 0$$

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \tan x \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \cot x \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$$

فرمول های انتگرال (یادآوری)

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$10) \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$$

$$2) \int a dx = ax + c$$

$$11) \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$3) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$12) \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$4) \int e^x dx = e^x + c$$

$$13) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(\sin x) + c$$

$$5) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$14) \int \tan x dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + c$$

$$6) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$7) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$8) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$



مثال های انتگرال

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \rightarrow * \int a^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2) \int a dx = ax + c \quad \rightarrow * \int 3 dx = 3x + c$$

$$* \int 2 dy = 2y + c$$

$$3) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c \quad \rightarrow * \int \sin 6x dx = -\frac{1}{6} \cos 6x + c$$

$$4) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c \quad \rightarrow * \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

$$5) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \quad \rightarrow * \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$6) \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c \quad \rightarrow * \int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4} + c$$

$$7) \int \frac{du}{u} = \ln u + c \quad \rightarrow * \int \frac{2x}{x^2} dx = \ln(x^2 + 4) + c$$

$$* \int \frac{x}{x^2+1} dx = \text{تبدیل میشود به} \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

$$* \int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \text{تبدیل میشود به} \rightarrow \frac{1}{3} \int \frac{3x^2+1}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x) + c$$

$$8) \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c \quad \rightarrow * \int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

ln

$$1) \ln a + \ln b = \ln ab$$

$$2) \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$3) a = b \leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$4) \ln a^b = b \ln a$$

$$5) e^{\ln a} = a$$

مثال)

فرمول ۴ ln فرمول ۵ ln

$$\rightarrow e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

برای حل ابتدا از فرمول ۴ و سپس از فرمول ۵ استفاده می کنیم



نکته : جواب معادله ی دیفرانسیل عدد نیست ، بلکه تابع است.

* معادله ی دیفرانسیل مرتبه اول

فرم کلی این نوع معادلات به صورت $f(x, y, y') = 0$ است.

این معادلات را در حالت های مختلفی به صورت زیر دسته بندی می کنیم و در هر حالت جواب معادله را به دست می آوریم.

(۱) معادله ی تفکیک پذیر (جداشدنی) :

معادله ی $y' = f(x, y)$ را تفکیک پذیر می گوییم ، هرگاه بتوانیم تابع سمت راست را به صورت

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$
 بنویسیم که در آن f_1 تابعی از x و f_2 تابعی از y باشد.

مثال (کدامیک از معادلات زیر تفکیک پذیر هستند.

$$y' = (x+1) \cdot (y+4) \quad \checkmark \quad \text{چون ضرب است و هر دو جدا است.}$$

$$y' = 2x + y \quad \times$$

$$y' = 3xy \quad \checkmark$$

در حل هر معادله دیفرانسیل ابتدا به جای y قرار می دهیم $\frac{dy}{dx}$ و سپس dx را در طرف دوم ضرب می کنیم.

در یک معادله ی تفکیک پذیر بعد از این دو مرحله جملات را طوری جا به جا می کنیم که x ها در کنار dx در یک طرف تساوی و y ها در کنار dy در طرف دیگر تساوی قرار می گیرند.

در آخر از طرفین تساوی انتگرال می گیریم و به طرفی که نسبت به x انتگرال گرفتیم پارامتر c را اضافه می کنیم.

مثال (هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$1) y' = (x+1)(y+2)$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \frac{dy}{dx} = (x+1)(y+2) \quad \text{طرفین وسطین}$$

$$dy = (x+1)(y+2)dx \quad \text{برای جا به جایی ، طرفین را بر } y+2$$

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int (x+1)dx \quad \text{تقسیم می کنیم و انتگرال می گیریم}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\xrightarrow{\text{جواب}} \ln(y+2) = \frac{x^2}{2} + x + c$$



مثال (معادله ی زیر را با شرط اولیه ی $y(2)=0$ حل کنید.

$$y(x^2 + 1)dy = 2x(y^2 + 1)dx$$

رابطه انتگرال $\rightarrow$ حل $\rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ $\rightarrow$ رابطه انتگرال

طرفی که $\ln$ دارد c هم به آن اضافه می شود $\rightarrow \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) + \ln c$

$$\ln(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \ln c(x^2 + 1) \rightarrow (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = c(x^2 + 1)$$

جواب عمومی $\rightarrow \sqrt{y^2 + 1} = c(x^2 + 1)$

$$\sqrt{0 + 1} = c(2^2 + 1) \rightarrow 1 = 5c \rightarrow c = \frac{1}{5}$$

جواب خصوصی $\rightarrow \sqrt{y^2 + 1} = \frac{1}{5}(x^2 + 1)$

*تابع همگن

تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه ی n می گوئیم هرگاه داشته باشیم $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

مثال (همگن بودن هریک از توابع زیر را بررسی کنید.

1) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

حل $\rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + 2\lambda x \cdot \lambda^2 y^2 \rightarrow \lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 xy^2$

$\lambda^3(x^3 + 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y) \rightarrow$ تابع همگن از درجه ۳

2) $f(x, y) = 2xy + 4y^3$

حل $\rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x \cdot \lambda y + 4\lambda^3 y^3$

$$2\lambda^2 xy + 4\lambda^3 y^3$$

$\lambda^2(2xy + 4\lambda y^3) \rightarrow$ غیر همگن



نکته : در یک تابع دو متغیره درجه ی هر جمله برابر است با جمع توان های متغیرهایش . اگر تابعی همه ی جملاتش از یک درجه باشند ، چنین تابعی همگن است و درجه ی همگن بودن برابر است با درجه ی توان هایش

$$f(x, y) = 2x + 5y \rightarrow \text{همگن از درجه } ۱$$

$$f(x, y) = x^2 + 3yx^2 \rightarrow \text{غیر همگن}$$

$$f(x, y) = 5x^2 + 4xy \rightarrow \text{همگن از درجه } ۲$$

(مثال)

$$f(x, y) = \frac{2x^3 + y^3}{4xy^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}{4\lambda x \cdot \lambda^2 y^2} \rightarrow \frac{2x^3 + y^3}{4xy^2} = \lambda^0 f(x, y) \rightarrow \text{همگن از درجه } ۰$$

* معادله دیفرانسیل همگن

الف) معادله دیفرانسیل به فرم $y' = f(x, y)$ را همگن گویند هرگاه تابع $f(x, y)$ همگن از درجه ۰ باشد.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{3xy}$$

همه به توان ۲ می باشند و ۲ در صورت با ۲ در مخرج ساده می شود و لاتبا به توان ۰ می شود که همان ۱ است.

ب) معادله دیفرانسیل به فرم $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ را همگن گویند هرگاه توابع P و Q همگن از درجه ۱ باشد.

$$(x^3 + 2y^3)dx + 4xy^2dy = 0$$

$\nwarrow$ $\swarrow$
P هر دو همگن از درجه ۳ Q

برای حل یک معادله ی دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم.

$$y = ux$$

$$dy = xdu + udx$$

با این تغییر معادله دیفرانسیل تبدیل به یک معادله ی تفکیک پذیر می شود که آن را به روش گفته شده حل

می کنیم



مثال) معادله ی زیر را حل کنید.

$$y = ux \quad dy = x du + u dx$$

$$(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} (x^2 - u^2x^2)dx + 2x \cdot ux(xdu + udx) = 0$$

$$x^2dx - u^2x^2dx + 2ux^3du + 2u^2x^2dx = 0$$

$$x^2dx + u^2x^2dx + 2ux^3du = 0$$

$$x^2(dx + u^2dx + 2uxdu) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x^2} dx + u^2dx + 2uxdu = 0$$

$$(1 + u^2)dx + 2uxdu = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله تفکیک پذیر}} 2uxdu = -(1 + u^2)dx$$

طرفین وسطین

$$\int \frac{2u}{1+u^2} du = \int \frac{-dx}{x}$$

$$\ln(1 + u^2) = -\ln x + \ln c$$

خواص ln

$$\ln(1 + u^2) = \ln \frac{c}{x}$$

بزرگ بالا

منفی پایین

$$y = ux$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$1 + u^2 = \frac{c}{x} \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x} \rightarrow \text{جواب نهایی}$$



مثال) معادله ی زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} \quad \text{طرفین وسطین}$$

$$dy = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} dx$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} xdu + udx = \frac{2u^4x^4 + x^4}{x \cdot u^3x^3} dx$$

$$xdu + udx = \frac{x^4(2u^4 + 1)}{x^4 \cdot u^3} dx$$

$$xdu + udx = \frac{2u^4 + 1}{u^3} dx$$

$$(xdu + udx)u^3 = (2u^4 + 1)dx$$

$$u^3xdu + u^4dx = (2u^4 + 1)dx$$

$$u^3xdu = (2u^4 + 1)dx - u^4dx$$

$$u^3xdu = (2u^4 + 1 - u^4)dx$$

$$u^3xdu = (u^4 + 1)dx \quad \text{طرفین وسطین}$$

$$\int \frac{1}{4} \frac{u^3}{u^4 + 1} \cdot du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{4} \ln(u^4 + 1) = \ln x + \ln c \rightarrow \text{دو طرف ln بود برای c هم ln می گذاریم}$$

$$\ln(u^4 + 1)^{\frac{1}{4}} = \ln cx \rightarrow (u^4 + 1)^{\frac{1}{4}} = cx$$

$$\sqrt[4]{u^4 + 1} = cx \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} \sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1} = cx$$

برگرداندن تغییر متغیر



*نکته

فرض کنید یک تابع دو متغیره مانند $f(x,y)$ داشته باشیم. از این تابع نسبت به هریک از متغیرهایش می توان مشتق گرفت که چنین مشتقاتی را مشتق نسبی یا جزیی می نامیم.
 مشتق تابع f نسبت به متغیر x را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ نشان می دهیم و مشتق نسبت به y را با نماد $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ نشان می دهیم.
 مشتق گیری نسبت به هریک از متغیرها انجام شود متغیر دیگر به عنوان ضریب در مشتق گیری تاثیر نداشته و فقط در جواب ضرب می شود.

(مثال)

$$f(x,y) = x^2y^3 + 4xy - 5x$$

$$\text{حل} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4y - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 4x$$

*نکته

هنگامی که از یک تابع دو متغیره نسبت به متغیر x انتگرال می گیریم y ها به عنوان ضریب در انتگرال گیری تاثیری نداشته و فقط در جواب ضرب می شوند. در این حالت به جای پارامتر C به جواب انتگرال عبارت f_y را اضافه می کنیم.
 f_y یعنی جمله ای بر حسب y

(مثال)

$$\int (x^2y^3 + 4xy) dx$$

$$\text{حل} \rightarrow \frac{x^3}{3}y^3 + 4\frac{x^2}{2}y + f(y)$$

*نکته

در انتگرال گیری از یک تابع دو متغیره نسبت به y ، متغیر x به عنوان ضریب در انتگرال گیری تاثیری ندارد و فقط در جواب انتگرال ضرب می شود. در این حالی به جای پارامتر C به جواب انتگرال جمله f_x را اضافه می کنیم.

(مثال)

$$\int (3xy^4 + 5x) dy$$

$$\text{حل} \rightarrow 3x\frac{y^5}{5} + 5yx + f(x)$$



*معادله دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل به فرم $p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ را کامل می گوئیم هرگاه داشته باشیم $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

(مثال)

$$(2xy + 3)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \longrightarrow \quad \text{معادله ی دیفرانسیل کامل است}$$

* نکته

اگر معادله دیفرانسیل کامل باشد ، در این صورت جواب آن تابعی است مانند $u(x,y)$ به طوری که دو شرط زیر صدق می کند.

$$1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = p(x,y)$$

$$2 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

برای پیدا کردن این جواب ابتدا نسبت به متغیر X انتگرال می گیریم و از جواب بدست آمده نسبت به متغیر y مشتق می گیریم و از مقایسه ی آن با رابطه ی شماره ۲ جواب معادله بدست می آید.

(مثال معادله ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(2xy + 3)dx + (x^2 + 8y)dy = 0$$

$$\text{انتگرال نسبت به } x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3 \rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (2xy + 3)dx \rightarrow u = x^2y + 3x + f(y) *$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 8y$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + f'(y) \rightarrow \text{از جواب } * \text{ به دست آمده نسبت به } y \text{ مشتق می گیریم}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ و } 3} x^2 + 8y = x^2 + f'(y) \rightarrow f'(y) = 8y$$

$$\int f'(y) = \int 8y \rightarrow f(y) = 8 \frac{y^2}{2} \rightarrow f(y) = 4y^2 + c$$

$$u = x^2y + 3x + 4y^2 + c \rightarrow \text{جواب معادله}$$

(مثال)

$$(e^x \sin y + 2x)dx + (e^x \cos y + 3)dy = 0$$

حل $\frac{\partial p}{\partial y} = e^x \cos y$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \longrightarrow$ کامل است

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + 2x \rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x} = \int e^x \sin y + 2x \rightarrow u = e^x \sin y + x^2 + f(y) *$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 3$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + f'(y) \longrightarrow \text{از جواب } * \text{ نسبت به } y \text{ مشتق می گیریم}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ و } 3} e^x \cos y + 3 = e^x \cos y + f'(y)$$

انتگرال نسبت به y

$$f(y) = 3 \longrightarrow \int f(y) = \int 3 \rightarrow f(y) = 3y + c$$

$$u = e^x \sin y + x^2 + 3y + c \longrightarrow \text{جواب}$$

*عامل یا فاکتور انتگرال ساز

اگر معادله ی دیفرانسیلی کامل نباشد، ممکن است بتوان تابع مناسبی پیدا کرد، به طوری که اگر طرفین معادله را در این تابع ضرب کنیم، معادله را تبدیل به یک معادله ی کامل کند. چنین تابعی را فاکتور انتگرال ساز می گوئیم.

$$3y \, dx + 4x \, dy = 0 \quad \xrightarrow{\times x^3 y^3} \quad 3y^4 x^2 \, dx + 4x^3 y^3 \, dy = 0$$

P Q P Q

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 3 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4$$

غیر کامل

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 12y^3 x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2 y^3$$

کامل

*نکته ۱

اگر در معادله ی غیر کامل داشته باشیم $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x)$ در اینصورت معادله ی دیفرانسیل، فاکتور انتگرالی به صورت زیر دارد:

$$h_{x=e} = e^{\int f(x) dx}$$



مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(4x + 3y^2)dx + 2xy dy = 0$$

حل $\frac{\partial p}{\partial y} = 6y$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ کامل نیست

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x) \longrightarrow \frac{6y - 2y}{2xy} = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x} = f_x$$

$$h_{x=e^{\int f(x)dx}} \longrightarrow e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} \rightarrow e^{\ln x^2} \rightarrow x^2 \longrightarrow \text{فاکتور انتگرال ساز}$$

$$(4x + 3y^2)dx + 2xy dy = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } x^2} \underbrace{(4x^3 + 3y^2x^2)dx}_P + \underbrace{2x^3y dy}_Q = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 6yx^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y \rightarrow \text{کامل است}$$

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 3y^2x^2 \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} u = x^4 + x^3y^2 + f(y) *$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^3 + \dot{f}(y) \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ مشتق}} *$$

$$\xrightarrow{2 \text{ و } 3} 2x^2y = 2x^2y + \dot{f}(y) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{f}(y) = 0 \rightarrow f(y) = c$$

$$u = x^4 + x^3y^2 + c \rightarrow \text{جواب نهایی}$$

نکته ۲:

اگر در معادله دیفرانسیل غیر کامل داشته باشیم $\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-p} = f(y)$ در اینصورت معادله فاکتور انتگرال ساز به صورت زیر می شود:

$$h(y) = e^{\int f(y)dy}$$



مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0$$

حل $\frac{\partial p}{\partial y} = 1 + 2xy \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \rightarrow$ کامل نیست

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-p} = f(y) \rightarrow \frac{1 + 2xy - (-1)}{-(y + xy^2)} = \frac{2 + 2xy}{-(y + xy^2)} = \frac{2(1 + xy)}{-y(1 + xy)} = -\frac{2}{y} = f(y)$$

$$h(y) = e^{\int f(y) dy} \rightarrow e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \quad \text{فاکتور انتگرال ساز}$$

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0 \xrightarrow{\frac{1}{y^2} \text{ ضرب در}} \underbrace{\left(\frac{1}{y} + x\right)}_P dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_Q dy = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \rightarrow \text{کامل است}$$

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + x \quad u = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + f(y) \quad * \quad \text{انتگرال نسبت به } x$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + f'(y) \quad * \quad \text{نسبت به } y \text{ مشتق}$$

$$\xrightarrow{۲ و ۳} \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2} + f'(y) \rightarrow f'(y) = 0 \rightarrow f(y) = c$$

$$u = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c \quad \text{جواب نهایی}$$



*معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

صورت این نوع معادلات به فرم $y' + p(x)y = q(x)$ است. برای حل این نوع معادلات ابتدا تابع $h(x)$ را از رابطه ی زیر

$$h(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

بدست می آوریم سپس جواب معادله را از فرمول زیر بدست می آوریم

$$y = \left(\int \frac{q(x)}{h(x)} dx + c \right) h(x)$$

مثال معادله ی زیر را حل کنید.

$$y + \frac{2}{x}y = x$$

حل $f(x) = \frac{2}{x}$

$$g(x) = x$$

$$h(x) = e^{-\int f(x)dx} \longrightarrow e^{-\int \frac{2}{x} dx} \rightarrow e^{-2\ln x} \rightarrow e^{\ln x^{-2}} \rightarrow x^{-2}$$

$$y = \left(\int \frac{y(x)}{h(x)} dx + c \right) h(x) \longrightarrow \left(\int \frac{x}{x^{-2}} dx + c \right) x^{-2} \rightarrow \left(\int x^3 dx + c \right) x^{-2} = \left(\frac{x^4}{4} + c \right) x^{-2}$$

x به توان منفی ۲ بالا رفت و با x جمع شد و شد ط به توان ۳

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}$$

$$xy' + y = x^3 \sin x$$

حل تقسیم بر x $y + \frac{1}{x}y' = x^2 \sin x$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2 \sin x$

برای اینکه y پریم، ضرب دارد باید ضرب را حذف کرد. یعنی تقسیم بر x کرد.

$$h(x) = e^{-\int f(x)dx} \longrightarrow h(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \rightarrow e^{-\ln x} \rightarrow e^{\ln x^{-1}} \rightarrow x^{-1}$$

$$y = \left(\int \frac{x^2 \sin x}{x^{-1}} dx + c \right) x^{-1} \rightarrow \left(\int x^3 \sin x + c \right) x^{-1}$$

$$y = [-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c] x^{-1}$$

$$y = -x^2 \cos x + 3x \sin x + 6 \cos x - \frac{6}{x} \sin x + \frac{c}{x}$$

نتیجه ی جدول

جواب

مشتق	انتگرال
x^3	$\sin x$
$3x^2$	$+$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$+$
	$\cos x$
	$-\sin x$

*نکته :

هنگامی که تابع تحت انتگرال به صورت حاصل ضرب دو تابع باشد در شرایطی که یکی از دو تابع چند جمله ای باشد برای محاسبه ی انتگرال از روش جدول استفاده می کنیم. در این روش هریک از توابع را در یک طرف قرار می دهیم. از چند جمله ای آنقدر مشتق می گیریم که به صفر برسیم. به همان تعداد از تابع دوم انتگرال می گیریم. در آخر جملات را اریب در هم ضرب کرده و جواب آن ها را یکی در میان مثبت و منفی می نویسیم.

*معادله ی برنولی

فرم کلی این نوع معادلات به صورت $y' + yf(x) = y(x)y^n$ است. برای حل این نوع معادلات ابتدا دو مرحله ی زیر را انجام می دهیم.

(۱) طرفین معادله را در y^{-n} ضرب می کنیم.(۲) طرفین معادله را در $(1-n)$ ضرب می کنیم.

بعد از این دو مرحله از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم. ←

$$u = y^{(1-n)}$$

$$u = (1-n)y^{-n}y$$

با این تغییر متغیر معادله تبدیل به یک معادله ی خطی مرتبه اول می شود که آن را به روش گفته شده حل می کنیم

(مثال)

$$y' + xy = xy^2$$

ضرب در منفی ۲ $\xrightarrow{\cdot 2}$ $y^{-2}y' + xy^{-1} = x$ ضرب در منفی ۲ همان توان y در صورت سوال است

ضرب در یک منهای n $\xrightarrow{1-2=-1}$ $-y^{-2}y' - xy^{-1} = -x$ *

توان منفی ۱ همان عددی است که از فرمول یک منهای n بدست آمده است $\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $u = y^{-1}$
 $u' = -y^{-2}y'$

* $\xrightarrow{\cdot}$ $u - xu = -x$ $\begin{cases} f(x) = -x \\ y(x) = -x \end{cases}$

$$h(x) = e^{-x} dx = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \left(\int \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx + c \right) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \left(\int -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \right) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = \left(e^{-\frac{x^2}{2}} + c \right) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{u = y^{-1}} y^{-1} = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{y} = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{\quad} y = \frac{1}{1 + ce^{\frac{x^2}{2}}}$$



(مثال)

$$y' = \frac{2}{3x}y = \frac{1}{3}x^2y^{-2}$$

ضرب در y به توان ۲

$$\xrightarrow{\text{حل}} y^2y' - \frac{2}{3x}y^3 = \frac{1}{3}x^2$$

ضرب در $(1-n)$
 $1 - (-2) = 3$

$$\xrightarrow{\quad} 3y^2y' - \frac{2}{x}y^3 = x^2 \quad *$$

تغییر متغیر

$$\xrightarrow{\quad} u = y^3$$

$$u' = 3y^2y'$$

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

$$* u' - \frac{2}{x}u = x^2$$

$$y(x) = x^2$$

$$h(x) = e^{-\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

$$u = \left(\int \frac{x^2}{x^2} dx + c \right) \cdot x^2 = \left(\int dx + c \right) \cdot x^2 = (x + c)x^2$$

$$u = x^3 + cx^2 \quad \xrightarrow{u = y^3} y^3 = x^3 + cx^2$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + cx^2}$$

