معادلات دیفرانسیل

مسائل حل شده از نوع تفکیک پذیر

۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

الف) $y' = e^{x+y}$

$y' = e^{x+y} \longrightarrow y' = e^x \cdot e^y \longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x e^y \longrightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx$

$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx \longrightarrow -e^{-y} = e^x + C$

تذکر $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$ قرار دهید

ب) $y' \cot x = 2 + y$

$\frac{dy}{dx} \cdot \cot x = 2 + y \Rightarrow \frac{dy}{2+y} = \frac{dx}{\cot x} \Rightarrow \int \frac{dy}{2+y} = \int \tan x \cdot dx$

$\ln|2+y| = -\ln|\cos x| + \ln C = \ln \frac{C}{|\cos x|}$, $C > 0 \Rightarrow y + 2 = C \cdot \sec x$

ج)

$y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y} = \frac{x\,dx}{x+2} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$

$\int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx \Rightarrow y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + c$

د)

$y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

ابتدا کسر $\frac{1}{x(1+x^2)}$ را تجزیه می‌کنیم (روش تجزیه کسرها)

$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow 1 \equiv A + Ax^2 + Bx^2 + Dx$

$1 \equiv A(1+x^2) + Bx^2 + Dx$

تساوی بالا باید به ازای هر x دلخواه برقرار باشد ابتدا فرض کنید $x = 0$ در نتیجه $A = 1$

به ازای $x = 1$ داریم $2 + B + D = 1$ به ازای $x = -1$ داریم $1 = 2 + B - D$

در نتیجه $B = -1$, $D = 0$

$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$\Rightarrow \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$

حل معادلات به فرم $y' = f(ax+by+c)$

مراحل ① قرار دهید $u = ax+by+c$

② مشتق بگیرید $u' = a+by' \rightarrow y' = \frac{1}{b}(u'-a)$

③ با جایگذاری ① و ② در معادله اولیه داریم:

$$\frac{1}{b}(u'-a) = f(u) \Rightarrow u'-a = bf(u) \rightarrow u' = bf(u)+a = h(u)$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = h(u) \rightarrow dx = \frac{du}{h(u)}$$

مثال) معادله زیر را حل کنید $y' = \tan(x+y) - 1$

حل $u = x+y \rightarrow \frac{du}{dx} = 1+y' \Rightarrow y' = \frac{du}{dx} - 1$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \tan(u) - 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{\tan u} \xrightarrow{\text{انتگرال}} x + c_1 = \ln|\sin u| \rightarrow$$

$$\sin u = ce^x \xrightarrow{u = x+y} \boxed{x+y = ce^x}$$

مثال) معادله زیر را حل کنید $y' = 1 + \frac{1}{x-y}$

$$u = x-y \rightarrow \frac{du}{dx} = 1-y' \rightarrow y' = 1 - \frac{du}{dx} \Rightarrow 1 - \frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} \rightarrow u\,du = -dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{1}{2}u^2 = -x + c \rightarrow u^2 = -2x + C$$

$$\boxed{(x-y)^2 = -2x + C}$$

مثال) $y' = 2x+y$

حل $u = 2x+y \rightarrow \frac{du}{dx} = 2+y' \rightarrow y' = -2 + \frac{du}{dx} \Rightarrow -2 + \frac{du}{dx} = u$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u+2 \rightarrow \frac{du}{u+2} = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(u+2) = x + C \rightarrow u+2 = ce^x$$

$$\boxed{2x+y+2 = ce^x}$$

۳۵

معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ همگن است اگر P و Q هم‌درجه باشند.

مثال: معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید: $2xydy+(x^2-y^2)dx=0$

حل: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ همگن است

$2(\lambda x)(\lambda y)dy+((\lambda x)^2-(\lambda y)^2)dx=0$

$2\lambda^2 xydy+\lambda^2(x^2-y^2)dx=0 \longrightarrow \lambda^2(2xydy)+\lambda^2(x^2-y^2)dx=0$

همگن از درجه ۲ است (توان λ ها ۲ است)

$y=vx \longrightarrow dy=vdx+xdv$ قرار می‌دهیم

$2xvx(xdx+xdv)+(x^2-v^2x^2)dx=0 \xrightarrow{\div x^2} (v^2+1)dx+2vxdx=0$

$\frac{dx}{x}+\frac{2v}{1+v^2}dv=0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln x+\ln(1+v^2)=\ln c \longrightarrow \ln x(1+v^2)=\ln c$

$x(1+\frac{y^2}{x^2})=c \longrightarrow y^2+x^2=cx$ قرار $v=\frac{y}{x}$

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$

معادله همگن از درجه ۳ است

$y=vx \longrightarrow dy=vdx+xdv \Rightarrow x^3(1+v^3)dx+3x^3v^2(vdx+xdv)=0$

بر x^3 تقسیم کنید

$(1+v^3)dx+3v^2dv=0 \longrightarrow \frac{dx}{x}+\frac{3v^2}{1+2v^3}dv=0$ انتگرال بگیرید

$\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+2v^3)=\ln c_1 \longrightarrow$

$4\ln x+\ln(1+2v^3)=4\ln c_1 \longrightarrow \ln x^4+\ln(1+2v^3)=\ln c$

$x^4(1+2v^3)=c \longrightarrow x^4(1+2\frac{y^3}{x^3})=c \longrightarrow x^4+2xy^3=c$

۴

مثال ۱ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} \rightarrow (x+\sqrt{xy})dy - y\,dx = 0$$

معادله همگن از درجه ۱ است.

$$y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv \Rightarrow (x+\sqrt{x^2v})(v\,dx + x\,dv) - vx\,dx = 0$$

طرفین را بر x تقسیم کنید و عبارت را ساده کنید

$$v\sqrt{v}\,dx + x(1+\sqrt{v})dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int v^{-\frac{3}{2}}dv + \int \frac{dv}{v} = C \rightarrow \ln x - 2v^{-\frac{1}{2}} + \ln v = C$$

$$\ln vx = C + 2v^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln y = C + 2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

مثال) معادله دیفرانسیل همگن زیر را حل کنید

$$\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx - \left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$
$$\downarrow \frac{y}{x} = v$$

$$\Rightarrow v\cos v\,dx - \left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\rightarrow -\sin v\,dx - x\left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} + \cot v\,dv = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln x + \ln v + \ln|\sin v| = \ln C$$

$$\ln xv\sin v = \ln c \longrightarrow xv\sin v = C \quad x\cdot\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} = C$$

مثال دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0 \quad ,(y(1)=0)$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\csc\frac{y}{x} = 0 \longrightarrow dy - \frac{y}{x}\csc\frac{y}{x}\cdot dx = 0$$

$$y = vx \rightarrow \frac{y}{x} = v \longrightarrow (v\,dx + x\,dv) - v\csc v\,dx = 0$$

ساده کنید

$$x\,dv + \csc v\,dx = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{x} + \sin v\,dv = 0$$

$$\ln x - \cos v = C \rightarrow \underline{\ln x - \cos\frac{y}{x} = C}$$

معادلات دیفرانسیل بنرم

$y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ (*) این معادلات همگن هستند.

با تغییر متغیر $y = vx$ و $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

بتوانیم متغیرها را از هم جدا کنیم، جواب‌گذاری در صورت کلی داریم.

$$v + x\frac{dv}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{c+d\frac{y}{x}}\right) = f\left(\frac{a+bv}{c+dv}\right)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f\left(\frac{a+bv}{c+dv}\right) - v = F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x}$$

که از هم جدا شده هستند

توجه کنید که f تابعی از یک کسری باشد که صورت و مخرج آن دو خط هستند، از ابتدا محاسبات عبور می‌کنند.

توجه: معادله به فرم کلی $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ (**) همگن نمی‌شود و قابل تبدیل به همگن هستند. اختلاف این معادله با معادله (*) در این است که در مخرج کسر دو خط هستند، از ابتدا نمی‌توان c و d را همزمان صفر نمود. این کافی است که ابتدا محاسبات را به حل تلاقی دو خط اشغال دهیم. البته اگر دو خط موازی باشند

روش حل: ابتدا $ah-eb$ را محاسبه می‌کنیم اگر مخالف صفر باشد دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند نقطه تلاقی آن‌ها از حل دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases}$ بدست می‌آید. فرض کنید (x_0, y_0) نقطه تلاقی دو خط باشد سپس تغییر متغیر $x = X + x_0$ ، $y = Y + y_0$ را اعمال می‌کنیم معادله (**) به فرم زیر تبدیل می‌شود که ممکن است

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{ex+hy}\right)$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

حل: ابتدا $ah-eb$ را محاسبه می‌کنیم $(1)(-1) - (1)(1) = -2 \neq 0$ پس دو خط نمودار کسر موازی نیستند

حل تلاقی دو خط $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ نقطه تلاقی

با جایگذاری $x = X+1 \Rightarrow dx = dX$

$y = Y-2 \rightarrow dy = dY$

در معادله داریم: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ حال قرار دهید $Y = vX$

$\leftarrow dy = v\,dx + x\,dv$

$(x-y)\,dy = (x+y)\,dx$ ساده کنید

$x(1-v)(v\,dx+x\,dv) = x(1+v)\,dx$

حل

$$(1+v^2)dx + x(v-1)dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{v-1}{1+v^2}dv = 0$$

طرفین را بر x تقسیم کنید

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) - \arctan v = c$$

v را بر حسب $\frac{y}{x}$ قرار دهید

$$\ln x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \arctan\frac{y}{x} = c$$

با توجه به اینکه $x = x-1$ ، $y = y+3$ داریم

$$\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right) - \arctan\frac{y+3}{x-1} = c$$

تذکر: اگر در خط مراز پنجه، تغییر متغیر $u = ax+by$ یا $v = ex+hy$ به (**) بدون متغیر جداندنی تبدیل میشود.

مثال) معادله $y' = \frac{x+y}{1-x-y}$ را حل کنید. حل: $ah - eb = -1+1 = 0$

تغییر متغیر $u = x+y$ را اعمال کنید داریم

$$u' = 1+y' \longrightarrow y' = u'-1$$

$$u' = \frac{u}{1-u} + 1 = \frac{1}{1-u} \Rightarrow (1-u)du = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int(1-u)du = \int dx$$

$$u - \frac{u^2}{2} = x + c \Longrightarrow (x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = x + c \quad \square$$

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(x - 2\sin y + 3)dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y\, dy = 0$$

حل: فرض کنید $\sin y = z$ پس از طرفین دیفرانسیل میگیریم $\cos y\, dy = dz$

در معادله اولیه جایگذاری میکنیم

$$(x - 2z + 3)dx + (2x - 4z - 3)dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{x - 2z + 3}{3 - 4z - 2x} \quad (*)$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = x - 2z$ داریم

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) \xrightarrow{\text{در رابطه } (*)} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = \frac{u+3}{2u-3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{4u+3}{2u-3} \Rightarrow$$

۷) $\frac{2u-3}{2u+1}\,du = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8}\ln|4u+3| + c$

$x = \frac{1}{2}(x-2z) - \frac{9}{8}\ln|4x-8z+3| + c$

$x = \frac{1}{2}(x-2\sin y) - \frac{9}{8}\ln|4x-8\sin y+3| + c$ به کتاب ارجاع دارد

$\Rightarrow 8\sin y + 4x + 9\ln|4x-8\sin y+3| = c$

معادلات دیفرانسیل کامل

مثال ۱) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$(2xy+2)dx + (x^2+4y)dy = 0$

$P \qquad Q$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \longrightarrow$ کامل است $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$u = \int P(x,y) + f(y) = \int (2xy+2)dx + f(y) = x^2y + 2x + f(y)$ (*)

$Q(x,y)$

$u = x^2y + 2x + f(y) \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ مشتق بگیرید}} \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = x^2 + 4x$

$\frac{df(y)}{dy} = 4y \Longrightarrow f(y) = 2y^2 \xrightarrow{(*)}$ جواب $x^2y + 2x + 2y^2 = c$

نتیجه $u(x,y) = c$

مثال) معادله $y' = \frac{x^2-y}{x}$ را حل کنید.

$y' = \frac{x^2-y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x} \longrightarrow (x^2-y)dx - x\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \longrightarrow$ کامل است

نسبت به y انتگرال

$u = \int P(x,y) + f(x) \Rightarrow u = \int -x\,dx + f(x) = -xy + f(x)$

$u = -xy + f(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -y + \frac{df(x)}{dx} = x^2 - y \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = x^2$

$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 \Longrightarrow -xy + \frac{1}{3}x^3 = c$

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$(x^2 - x + y^2)dx - (e^y - 2xy)dy = 0$

شرط کامل بودن $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ کامل است

$u = \int P(x)dx + f(y)$ $\quad u = \int (x^2 + y^2)dx + f(y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + f(y)$ (a)

$\frac{du}{dy} = 2yx + \frac{df(y)}{dy} = -e^y + 2xy \Rightarrow \frac{df(y)}{dy} = -e^y \rightarrow f(y) = -e^y$

$f(y)$ را در (a) قرار دهید

$u = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + y^2x - e^y = c$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$\cos y\,dx + (y^2 - x\sin y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y \rightarrow$ معادله کامل است

$u = \int \cos y\,dx + f(y) = x\cos y + f(y)$ (a)

$\frac{du}{dy} = -x\sin y + \frac{df(y)}{dy} = y^2 - x\sin y \rightarrow \frac{df(y)}{dy} = y^2 \rightarrow f(y) = \frac{1}{3}y^3$ انتگرال

$\Rightarrow u = c \rightarrow x\cos y + \frac{1}{3}y^3 = c$

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$(4x^3\sin^2 y - 2x\sin y)dx + (4x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0$ (a)

(b) $\sin y = T \rightarrow \cos y\,dy = dT$ (c)

(b) و (c) را در (a) قرار دهید

$(2x^4T^3 - 2xT)dx + (4x^5T^2 - x^2)dT = 0$ (d)

ضریب کامل بودن را برای (d) بررسی می‌کنیم

$\frac{\partial P}{\partial T} = 12x^5T^2 - 2x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^5T^2 - 2x \Rightarrow$ کامل است

$u = \int (4x^5T^2 - 2xT)dx + f(T) = x^4T^3 - x^2T + f(T)$ (e)

از طرفین (e) نسبت به T مشتق بگیرید

$\frac{\partial u}{\partial T} = 3x^4T^2 - x^2 + \frac{df(T)}{dT} = 4x^4T^2 - x^2 \Rightarrow \frac{df(T)}{dT} = 0 \rightarrow f(T) = c$

در (e) به جای $f(T)$، c می‌گذاریم

$x^4T^3 - x^2T = c$

نکته: برای حل معادلات کامل میتوان از رابطه زیر نیز استفاده کرد

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = c$$

که در آن (x_0,y_0) نقطه دلخواه در ناحیه D میباشد و لازم است که (x_0,y_0) نقطه‌ای باشد که P و Q در این نقطه پیوسته‌اند

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = c$$

مثال) معادله $(3x^2y-4x)dx+(x^3+2y)dy=0$ را حل کنید

حل داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2 \longrightarrow \text{کامل است}$$

نقطه $(0,0)$ را در نظر می‌گیریم

$$\int_0^x (3x^2y-4x)dx+\int_0^y 2y\,dy=c \Rightarrow x^3y-3x^2+y^2=c$$

تمرینات مربوط به فاکتورهای انتگرال‌گیری (عامل انتگرال ساز)

مثال) معادله دیفرانسیل $xdy-ydx=0$ را حل کنید.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1 \quad \text{کامل است}$$

طرفین معادله را در $\frac{1}{x^2}$ ضرب کنید

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{Q(x,y)}dy-\underbrace{\frac{y}{x^2}}_{P(x,y)}dx=0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{x^2} \rightarrow \text{کامل است}$$

پس عامل انتگرال ساز $\frac{1}{x^2}$ است.

* اگر طرفین معادله اولیه را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب کنیم داریم

$$\frac{x}{y^2}dy-\frac{1}{y}dx=0$$

عامل انتگرال‌ساز $\frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2} \longrightarrow \text{کامل است}$$

* اگر طرفین معادله اولیه را در $\frac{1}{xy}$ ضرب کنیم داریم

$$\frac{1}{y}dy-\frac{1}{x}dx=0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=0 \longrightarrow \text{کامل است} \Rightarrow \text{عامل انتگرال‌ساز } \frac{1}{xy}$$

از این مثال نتیجه می‌گیریم که یک معادله بیش از یک فاکتور انتگرال دارد و در ضمن ممکن است فاکتور انتگرال تابعی از x و یا y باشد

مثال) نشان دهید $F = x^2y^3$ یک فاکتور انتگرال‌ساز برای $4x\,dy + 3y\,dx = 0$ است.

حل: طرفین معادله را در F ضرب کنید

$$\underbrace{4x^3y^3}_{Q}dy + \underbrace{3x^2y^4}_{P}dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 12x^2y^3 \;,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2y^3$$

کامل است

تاکنون یاد گرفتیم که برای چه فاکتور انتگرال‌سازی معادله دیفرانسیل

(*) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

باید حالات خاصی را بررسی کنیم فرض کنید معادله بالا دارای عامل انتگرال‌ساز $F(x,y) \neq 0$ باشد

الف) اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$ باشد در این صورت معادله دیفرانسیل دارای فاکتور

انتگرال‌ساز $F(x) = e^{\int f(x)dx}$ است.

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x+y^2)}_{P}dx - \underbrace{2xy}_{Q}dy = 0$$

حل:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \;,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$ پس معادله کامل نیست.

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = f(x) \rightarrow F = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

طرفین معادله را در $\frac{1}{x^2}$ ضرب کنید

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)}_{P}dx - \underbrace{2\frac{y}{x}}_{Q}dy = 0 \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2\frac{y}{x^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$$ کامل است

(C) $u = \int \frac{-2y}{x}dy + f(x) = -\frac{y^2}{x} + f(x) \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ مشتق}} u = \frac{y^2}{x^2} + \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} f(x) = \ln x \Rightarrow u = \ln x - \frac{y^2}{x} = c$ در رابطه (C) قرار می‌دهیم

ب) اگر $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -f(y)$ باشد در این صورت معادله دیفرانسیل (*) دارای فاکتور

انتگرال‌ساز $F(y) = e^{\int f(y)dy}$ می‌باشد.

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y(1+xy)dx - x\,dy = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ کامل نیست $\xrightarrow{}$ $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2(1+xy)}{y(1+xy)} = \frac{2}{y}$

ص ۱۱

$F = e^{\int f(y)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$ عامل انتگرال ساز

طرفین معادله را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب کنید

$\frac{1}{y^2}(y(1+xy))dx - \frac{1}{y^2}x\,dy = 0 \rightarrow \underbrace{(\frac{1}{y}+x)}_{P}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{Q}dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$ ← کامل است ↙ $u = \int P(x,y)dx + f(y)$

$u = \int (\frac{1}{y}+x)dx + f(y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + f(y)$ (*)

از طرفین (*) نسبت به y مشتق بگیرید

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{df(y)}{dy} = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{df(y)}{dy} = 0 \rightarrow f(y) = C_1$

در (*) به جای $f(y)$ مقداری گذاشتیم

$\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + C_1 = C \rightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C$ ← عدد مثبت

تعریف: معادلات مربوط به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

به صورت کلی این نوع معادله دیفرانسیل به فرم $y' + y f(x) = g(x)$ است. باید ابتدا تابع $h(x) = e^{-\int f(x)dx}$ را بیابیم سپس جواب تعمیم یافته $y = (\int \frac{g(x)}{h(x)}dx + c)h(x)$ است.

مثال معادله دیفرانسیل $y' + 2y = e^x$ را حل کنید

داریم $f(x) = 2$ $g(x) = e^x$ $\Rightarrow h(x) = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$

$\Rightarrow y = (\int \frac{e^x}{e^{-2x}}dx + c)\cdot e^{-2x} = (\int e^{3x} + c)e^{-2x} = (\frac{1}{3}e^{3x} + c)e^{-2x}$

$y = \frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}$

معادله دیفرانسیل $y' - xy = x$ $(y(0) = 0)$ را حل کنید

$f(x) = -x$ $g(x) = x$ $h(x) = e^{-\int -x dx} = e^{\frac{+x^2}{2}}$

حل در صفحه بعد ←

ص ۱۱

$$y=\left(\int \frac{g(x)}{h(x)}dx+c\right)\cdot h(x)=\left(\int \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}dx+c\right)\cdot \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\left(\int xe^{\frac{-x^2}{2}}dx+c\right)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=\left(-e^{\frac{-x^2}{2}}+c\right)e^{\frac{x^2}{2}}=\left(-1+ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\xrightarrow{y(0)=0} 0=-1+c \quad c=1$$

$$\boxed{y=-1+e^{\frac{x^2}{2}}}$$

حل

مساله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\tan x\cdot\frac{dy}{dx}+y=2x\sec x$$

حل: طرفین ساده را بر $\tan x$ تقسیم می‌کنیم داریم

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=2x\csc x \longrightarrow y'+\cot x\cdot y=2x\csc x$$

که در آن $f(x)=\cot x$ و $g(x)=2x\csc x$

$$h(x)=e^{-\int f(x)dx}=e^{-\int\cot x dx}=e^{-\ln|\sin x|}=\frac{1}{|\sin x|}$$

$$y=\left(\int\frac{2x\csc x}{\frac{1}{\sin x}}dx+c\right)\cdot\frac{1}{\sin x}=\left(\int 2x\,dx+c\right)\cdot\frac{1}{\sin x}$$

توجه: $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ فرض

$$y=\left(\frac{2}{2}x^2+c\right)\cdot\frac{1}{\sin x}=\frac{2x^2}{2\sin x}+\frac{c}{\sin x}$$

توجه: یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند به شکل x بر حسب تابعی از y خطی باشد

و صورت کلی آن به شکل $\frac{dx}{dy}+xf(y)=g(y)$ و حل آن به روش زیر می‌باشد

$$h(y)=e^{\int f(y)dy} \quad \text{که} \quad x=\left(\int\frac{g(y)}{h(y)}dy+c\right)\cdot h(y)$$

مثال) معادله دیفرانسیل $y'(x\sin y+2\sin^2 y)=1$ را حل کنید

حل $y'=\frac{dy}{dx}\rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=x\sin y+2\sin^2 y \Rightarrow \frac{dx}{dy}-x\sin y=2\sin^2 y$

این معادله خطی است به x به عنوان تابعی از y است.

$$f(y)=-\sin y \qquad g(y)=2\sin^2 y \Rightarrow x=\left(\int\frac{2\sin^2 y}{h(y)}dy+c\right)\cdot h(y)$$

$$h(y)=e^{\int f(y)dy}=e^{-\int\sin y dy}=e^{\cos y}$$

$$x=\left(\int\frac{2\sin y\cos y}{e^{\cos y}}dy+c\right)e^{-\cos y}=e^{-\cos y}\left(\int\sin y\cos y\,e^{\cos y}dy+c\right)=-2\cos y+2+ce^{-\cos y}$$

□

معادله برنولی : معادله‌ای به صورت زیر که $n \in \mathbb{R}$ و $n \neq 0, 1$ است.

$$y' + y \cdot f(x) = y^n \cdot g(x)$$

برای حل طرفین معادله را بر y^n تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ را در نظر بگیرید. آنگاه معادله خطی مرتبه اول می‌شود.

$$u = y^{1-n} \longrightarrow \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} + (1-n)u \cdot f(x) = (1-n)\,g(x)$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^2 \xrightarrow{\div y^2} y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x \quad (*)$$

تغییر متغیر $u = y^{-1}$

$$\longrightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \xrightarrow{(*)} \frac{du}{dx} + u = -x$$

خطی مرتبه اول $f(x)=1$ $g(x)=-x$

$$h(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x} \Rightarrow y = \left(\int \frac{g(x)}{h(x)}dx + c\right)\cdot h(x)$$ جواب کلی

$$\rightarrow u = \left(\int \frac{-x}{e^x}dx + c\right)\cdot e^{-x} = \left(\int -xe^{-x} + c\right)\cdot e^{x} = (-xe^{-x} + e^{-x})e^{x} = -x + 1 + ce^{x}$$

$$y^{-1} = -x + 1 + ce^{x}$$ جواب کلی

مثال

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(2xy^3 - y)\,dx + 2x\,dy = 0$$

حل: ابتدا معادله را به صورت $y' + yf(x) = y^n \cdot g(x)$ می‌نویسیم

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -y^3 \xrightarrow{\div y^3} y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-2}}{2x} = -1 \quad (1)$$

تغییر متغیر $u = y^{-2}$ داریم

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$ این را در (1) قرار دهید

$$\frac{1}{-2}\frac{du}{dx} - \frac{u}{2x} = -1 \longrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 2$$ خطی مرتبه اول

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 2 \longrightarrow h(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$u = \left(\int \frac{g(x)}{h(x)}dx + c\right)\cdot h(x) = \left(\int \frac{2}{x^2}dx + c\right)\cdot x^2 = \left(-\frac{2}{x} + c\right)x^2 = -2x + cx^2$$

$$u = y^{-2} = -2x + cx^2 \rightarrow \frac{1}{y^2} = -2x + cx^2 = \frac{c}{x^2} - 2x$$

توجه: یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است که نسبت به x و مشتقات تابعی از y برزم معادله برحول y مرتبه

$$\frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n \cdot g(y)$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+y+1} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(y+1)x^2$$ این معادله برحول است

طرفین را بر x^2 تقسیم کنید

$$\frac{3x^2 dx}{dy} - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(y+1) \quad (1)$$

تغییر متغیر $u = x^3$ در نظر بگیرید داریم $\frac{du}{dy} = 3x^2\frac{dx}{dy}$ در (1) جایگذاری کنید

$$\frac{du}{dy} - u = y+1 \longrightarrow \text{خطی مرتبه اول} \begin{cases} f(y) = -1 \\ g(y) = y+1 \end{cases} \rightarrow h(y) = e^{\int f(y)dy} = e^{\int -dy} = e^{-y}$$

$$u = \left(\int \frac{g(y)}{h(y)}dy + c\right)\cdot h(y) = \left(\int \frac{y+1}{e^y}dy + c\right)\cdot e^y$$

$$u = \left(\int (ye^{-y} + e^{-y})dy + c\right)e^y = e^y(-ye^{-y} - e^{-y} - e^{-y} + c) = (-ye^{-y} - 2e^{-y} + c)e^y$$

$$u = -y - 2 + ce^y \Longrightarrow \boxed{x^3 = -y - 2 + ce^y}$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\boxed{y'\cos y + \sin y = x + 1}$$

حل: فرض کنید $u = \sin y$ پس $\frac{du}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$

$$\frac{du}{dx} + u = x + 1 \longrightarrow \text{خطی مرتبه اول} \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = x+1 \end{cases} \quad h(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

$$u = \left(\int \frac{g(x)}{h(x)}dx + c\right)\cdot h(x) = \left(\int \frac{x+1}{e^x}dx + c\right)\cdot e^{-x} = \left(\int (xe^{-x} + e^{-x})dx\right)\cdot e^{-x}$$

$$u = (xe^{-x} - e^{-x} + e^{-x} + c)\cdot e^{-x} = x + ce^{-x} \Longrightarrow \boxed{\sin y = x + ce^{-x}}$$ جواب کلی

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم:
این معادله به دو صورت است { الف) معادلات خطی / ب) معادلات غیرخطی
معادلات خطی نیز خود به دو دسته تقسیم بندی شوند { ۱) معادله خطی با ضرایب ثابت / ۲) معادله خطی با ضرایب متغیر

معادله خطی مرتبه دوم: صورت کلی $$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=r(x)$$ ①

تعریف: اگر در معادله ① $r(x)=0$ باشد معادله را همگن و در غیر اینصورت آن را غیر همگن می گویند. صورت کلی معادله مرتبه دوم همگن به فرم زیر است

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\,y=0$$ ②

تعریف: در معادله ② توابع $p(x)$ و $q(x)$ را ضرایب معادله نامند

قضیه ۱: اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن باشد آنگاه $y=cy_1$ نیز یک جواب معادله است

قضیه ۲: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن ② باشند آنگاه y_1+y_2 و در نهایت $c_1y_1+c_2y_2$ نیز یک جواب آنست

مثال: نشان دهید $y_1=\cos 2x$ و $y_2=\sin 2x$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y''+4y=0$ می باشند و $c_1y_1+c_2y_2$ نیز جواب معادله است.

حل:

$$y_1=\cos 2x \to y_1'=-2\sin 2x \to y_1''=-4\cos 2x$$

در معادله اولیه $y''+4y=0$ قرار دهید $\to (-4\cos 2x)+4(+\cos 2x)=0$ ✓

$$y_2=\sin 2x \to y_2'=2\cos 2x \to y_2''=-4\sin 2x$$

در معادله دیفرانسیل قرار دهید $\to -4\sin 2x+4\sin 2x=0$ ✓

$c_1y_1+c_2y_2$ ؟ $\Rightarrow$ $c_1y_1''=c_1(-4\cos 2x)$ ، $c_2y_2''=c_2(-4\sin 2x)$

در معادله اولیه $\to$ $c_1y_1=c_1\cdot\cos 2x$

$$(c_1y_1''+c_2y_2'')+4(c_1y_1+c_2y_2)$$
$$=-4c_1\cos 2x-4c_2\sin 2x+4c_1\cos 2x+4c_2\sin 2x$$
$$=0$$

① $y''+ay'+by=0$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت ؛ فرض معادله مهم است که در آن $a,b\in\mathbb{R}$ مقادیر ثابت هستند و دامنه x کوچک x هاست.

جواب معادله خطی همگن مرتبه اول بصورت $y=ce^{-kx}$ است زیرا

مثال کلی معادله دیفرانسیل اول همگن $y'+ky=0$ است پس:

$$\frac{dy}{dx}+ky=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=-ky \longrightarrow \frac{dy}{y}=-k\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln|y|=-kx+c$$

$$\Rightarrow y=ce^{-kx}$$

پس جوابی است که حدس زده شود ممکن است $y=e^{tx}$ یک جواب معادله $y''+ay'+by=0$ باشد (البته اگر t به طریقی مناسب انتخاب شود)

حال این جواب و مشتقات آنرا در معادله ① قرار دهیم و t را طوری تعیین میکنیم که $y=e^{tx}$ در معادله صدق کند

$$y=e^{tx} \longrightarrow y'=te^{tx} \longrightarrow y''=t^2e^{tx} \quad ②$$

② را در ① قرار میدهیم

$$t^2e^{tx}+ate^{tx}+be^{tx}=e^{tx}(t^2+at+b) \quad ③$$

که ③ میتواند صفر باشد نمی e^{tx} جواب باشد پس مثبت است زیرا اگر t ریشه معادله $t^2+at+b=0$ باشد c صفر میشود بنابراین برای حل معادله ① ابتدا معادله ④ $t^2+at+b=0$ را که به آن معادله مشخصه یا معادله مشخصه میگوییم را تشکیل میدهیم و ریشه‌های ④ را بدست میآوریم توجه کنید این معادله درجه دوم است از نظر وجود ریشه سه حالت دارد

حالت اول: معادله دارای دو ریشه حقیقی است نمی $\Delta>0$ $(a^2-4b>0)$

اگر ریشه‌های t_1 و t_2 باشند آنگاه $y_1=e^{t_1x}$ و $y_2=e^{t_2x}$ جواب‌های معادله ① هستند.

مثال) جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''-2y'-3y=0$ را بیابید.

معادله مشخصه $t^2-2t-3=0 \longrightarrow t_1=3, t_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{3x} \\ y_2=e^{-x} \end{cases}$ جواب‌ها

قضیه: $y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن است اگر y_1 و y_2 جواب‌های خطی مستقل باشند به عبارت دیگر $\frac{y_1}{y_2}$ برابر عدد ثابت c نباشد یعنی $\frac{y_1}{y_2}$ تابعی برحسب x باشد.

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-2y'-15y=0$ را بیابید.

y'': معادله مفسر $t^2-2t-15=0 \rightarrow (t-5)(t+3)=0 \quad t_1=5 \quad t_2=-3$

جواب عمومی مسئله $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-3x}$ می‌شود.

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-y'-6y=0 \quad (y(0)=3, y'(0)=1)$

حل: معادله مفسر $t^2-t-6=0$

$t_1=-2, t_2=3$ پس جواب عمومی $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$ است. $\leftarrow y'=-2c_1e^{-2x}+3c_2e^{3x}$

$y(0)=3 \longrightarrow 3=c_1+c_2$ داریم

$y'(0)=-4 \longrightarrow -4=-2c_1+3c_2$ } حل کنید $\Longrightarrow$ $c_1=\frac{3}{5}$ $c_2=\frac{12}{5}$ $\Rightarrow$

جواب عمومی $y=\frac{3}{5}e^{-2x}+\frac{12}{5}e^{3x}$

حالت دوم: معادله مفسر دارای ریشه مضاعف باشد یعنی $\Delta=0$ $(a^2-4b=0)$

در این حالت معادله مفسر دارای دو ریشه مساوی $t_1=t_2=t$ پس معادله دارای یک جواب: $y_1=e^{tx}$, $t=-\frac{a}{2}$

و جواب دوم به صورت $y_2=c_2xe^{-\frac{a}{2}x}$

در نتیجه جواب کلی معادله دیفرانسیل (که معادله مفسر ریشه مضاعف دارد) به فرم $y=(c_1+c_2x)e^{\frac{a}{2}x}$ است

مثال) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-6y'+9y=0$ را بیابید

ریشه مضاعف 3 $\leftarrow$ معادله مفسر $t^2-6t+9=0 \quad (t-3)^2=0 \longrightarrow t=3$

جواب عمومی $y=(c_1+c_2x)e^{3x}$

حالت سوم: معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز مختلط یا موهومی باشد ($\Delta = a^2 - 4b < 0$)

$t_1 = p + iq$ ، $t_2 = p - iq$ ، $q \neq 0$

در اینصورت جواب های معادله مشخصه بصورت خواهد بود در نتیجه جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ بصورت: $y_1 = e^{(p+iq)x}$ ، $y_2 = e^{(p-iq)x}$ می باشد با توجه به اینکه $\frac{y_1}{y_2} = e^{2iqx} \neq 0$ پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت $y = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x}$ است

با توجه به رابطه اویلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ فرم جواب عمومی در حالت کلی بشکل

$$\boxed{y(x) = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)}$$

مثال) معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 10y = 0$ را حل کرده، جواب عمومی را بنویسید

$t^2 + 2t + 10 = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \Delta = 4 - 40 = -36 < 0 \xrightarrow[\text{فرمول ضلع}]{\text{ریشه موهومی}} t = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$t = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i \begin{cases} \to t_1 = -1 + 3i \\ \to t_2 = -1 - 3i \end{cases} \Longrightarrow p = -1 \,,\ q = 3$

$\Longrightarrow y = e^{-x}(A\cos 3x + i\sin 3x)$ جواب عمومی

مثال معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه زیر را حل کنید $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ ، $4y'' + 8y' + y = 0$

حل: معادله مشخصه $4t^2 + 8t + 1 = 0$ ← $\Delta = 64 - 16 = 48$

$t = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \to t_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \to t_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$p = -1 \,,\ q = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow y = e^{-x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

$y' = -e^{-x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-x}(-\frac{\sqrt{3}}{2}A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

با توجه به شروط اولیه $A = 0$ و $B = 2\sqrt{3}$ می شود پس جواب

$$\boxed{y = 2\sqrt{3}e^{-x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوم : صورت کلی ① $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=f_2(x)$

که $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ را ضرایب معادله می نامند

جواب عمومی این معادله بصورت مجموع دو جواب $y_h(x)$ و $y_p(x)$ می باشد که

جواب عمومی معادله همگن شاخه است $y''+y'P_1(x)+yP_2(x)=0$

و y_p یک جواب ساده معادله ① بدون پارامتر می باشد. پس جواب عمومی

معادله ① $y=y_h(x)+y_p(x)$ است.

مثال) نشان دهید $y_p=e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=2e^x$ است،

و سپس جواب عمومی آنرا بیابید

$y_p=e^x \rightarrow y_p'=e^x \rightarrow y_p''=e^x$ در معادله قرار دهید $e^x+e^x=2e^x$ ✓

اکنون جواب عمومی باید جواب معادله همگن $y''+y=0$ را بیابیم

معادله $t^2+1=0$ $\Delta=-1$ $t=\pm i \begin{cases} p=0 \\ q=1 \end{cases}$ $y_h(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$y=y_p+y_h=\underbrace{c_1\cos x+c_2\sin x}_{y_h}+\underbrace{e^x}_{y_p}$

روش یافتن جواب خصوصی $y_p(x)$: روش ضرایب نامعین وقتی ضرایب ثابت باشد.

$$(*) \quad y''+a_1y'+a_2y=f(x)$$

حالت اول : اگر $f(x)$ (طرف دوم معادله $(*)$) یک چندجمله ای از درجه n باشد

جواب خصوصی یک چندجمله ای از درجه n است.

$y_p=x^m$ (یک چندجمله ای از درجه n)

که m تعداد ریشه های صفر معادله مشخصه است.

مثال) فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'''-2y''=x^3+1$ را بیابید

حل: $t^3-2t^2=0$ معادله مشخصه $t^2(t-2)=0$ $t^2=0 \quad t=0$ $t=2$

$\Rightarrow m=2, n=3 \xleftarrow{\text{درجه } f} f(x)=x^3+1$

$\Rightarrow y_p=x^2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$