

①

صفحه اول
صفحه اول

بسمه تعالی

جبه اول درس ریاضیات گسسته

موضوع شمارش:

اصل جمع: اگر عمل به n طریق و عمل دیگر به m طریق قابل انجام باشد، بطوریکه این دو عمل همزمان نتوانند رخ دهند، آنگاه یکی از این دو عمل به $(n+m)$ طریق انجام پذیر است.

مثال ۱- یک دانشجوی رشته کامپیوتر می‌تواند پروژه درسی خود را از بین دو لیست A و B انتخاب نماید. لیست A شامل ۲ عنوان پروژه و لیست B شامل ۱۵ عنوان پروژه می‌باشد. این دانشجوی به چند طریق می‌تواند یک پروژه از دو لیست A و B انتخاب کند.

حل: $n=2, m=15$ پس $m+n=2+15=17$ یعنی دانشجوی می‌تواند به ۱۷ طریق یک عنوان پروژه انتخاب کند.

اصل ضرب: اگر عمل به n طریق قابل انجام باشد و برای هر یک از حالت‌های این n طریق، عمل دیگری به m طریق انجام گیرد، این دو عمل با هم به $m \times n$ طریق قابل انجام خواهد بود.

مثال ۲- می‌خواهیم از یک کلاس ۱۴ نفری که شامل ۱۵ دانشجوی پسر و ۲۵ دانشجوی دختر است، یک نماینده انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق می‌تواند انجام شود (دختر یا پسر). و اگر می‌خواهیم از همین کلاس یک نماینده دختر و یک نماینده پسر انتخاب کنیم به چند طریق؟

ص: طبق اصل جمع $25+15=40$ حالت مختلف برای انتخاب یک نماینده طبق اصل ضرب $25 \times 15 = 375$ حالت برای انتخاب یک نماینده پسر و یک دختر دارد.

مثال ۳: با حروف الفبای فارسی چند کلمه ۵ حرفی میتوان نوشت؟ (با معنی یا بی معنی)

حل: $۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ = ۳۲^۵$ جواب $\rightarrow$ تعداد حروف ۳۲
چون تکرار هر حرف مجاز است.

مثال ۴: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی را بیابید

حل: فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ در این صورت

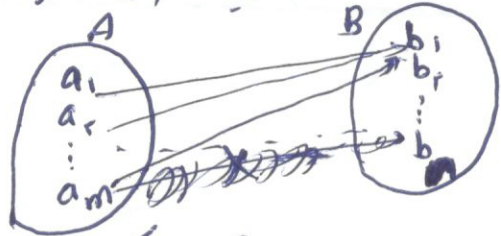
در ساختن یک تابع از A به B ، به هر یک از اعضا A یک دنباله یک عضو از B

انتخاب اختصاص دارد. واضح است که برای تعریف مقدار تابع در a_1 یعنی

$f(a_1)$ ، n انتخاب و برای مقدار تابع در a_2 (یعنی $f(a_2)$) هم n انتخاب و برای

$\dots$ تعریف $f(a_m)$ نیز n انتخاب وجود دارد پس طبق اصل ضرب:

$$\text{تعداد توابع} = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_m = n^m$$



مثال ۵: تعداد توابع یک به یک از A به B (در شکل بالا) را بدست آورید

الف: اگر $m > n$ باشد (تعداد عضو A بیشتر از تعداد عضو B باشد) آنجا قاعده یک به یک وجود ندارد

ب: اگر $m \leq n$ باشد تعداد توابع یک به یک از A به B برابر است با:

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$$

مثال ۹: شماره تلفن ۱۰ رقمی در ایران (رقمی درازا انی) $xxxx-xxxx-xxxx$

است که در آن N یکی از اعداد ۲ تا ۹ و x یکی از ارقام ۰ تا ۹ است

تعداد تلفن ممکن با این الگو چندتا است

$$(۸ \times ۱۰ \times ۱۰) (۸ \times ۱۰ \times ۱۰) (۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰) = ۶۴۰۰ / ۵۰۰۰ / ۵۰۰۰$$

(۳)

صفحه سوم
عبدالله

جایگشت (تبدیل):

مفروض کنید X مجموعه‌ای از n شیء متمایز باشد و آرایش خطی از اعضامجموعه X را یک جایگشت می‌نامیم
جایگشت یک مجموعه n عضوی برابر $n!$ است. (n فاکتوریل)
توضیح: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$
 $0! = 1$, $1! = 1$ مثال ۷: تعداد حالات مختلف قرار گرفتن n نفر در یک صف چقدر است؟جواب: $n!$ تعریف: (۲- جایگشت) مفروض کنید X مجموعه‌ای از n شیء متمایز
 $1 \leq r \leq n$ باشد. هر آرایشی (ترتیب) خطی از r عضو مجموعه X
را یک (جایگشت r -تایی) می‌نامیم و آن را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که ترتیب
قرار گرفتن اشیاء مهم است.قضیه: تعداد جایگشت r شیء از n شیء یعنی r -جایگشت r -تایی مجموعه n عضوی
با P_r یا $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم که
$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
مثال ۸: تعداد اعداد ۳ رقمی که می‌توان با ارقام مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ ایجاد نمود در هر تکرار
تکرار ارقام مجاز باشد چقدر است؟

$$\{n=4, r=3\} \rightarrow P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1} = 24$$

مثال (نشان دهید) زوج ترتیب می‌توان از یک مجموعه n عضوی انتخاب نمود؟

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)(n-2)$$

جواب:

مثال (تکرار است) ۴ نفر در جلسه‌ای شش‌گانه می‌نشینند. الف) به چه طریقی شخص B بعد از شخص A
نشینی کند؟ ب) به چه طریقی ممکن است شخص B بلافاصله بعد از شخص A بنشیند؟
پ) اگر الف) و ب) تقریباً هم‌حالت می‌باشند شش‌گانه می‌نشینند که دقیقاً در نمی‌آید از حالات ۴ نفره شخص B بعد از A
است پس $\frac{4!}{2} = 12$ ب) A و B اصل می‌توانند در هر یک از ۴ حالت $4! = 24$

حلبه رستم:

جائگیت دایره ای؛ یک جائگیت دایره ای (دوری) از n شیء متمايز، اگر اشیائی از n شیء دور یک دایره است از آنجا که چرخش n شیء حالت جدیدی ایجاد نمی کند تعداد جائگیت های دوری n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

مثال ۱) خانواده ای شامل پدر و مادر، سه پسر و دو دختر است. به چه طرق می توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه پدر و مادر کنار هم بنشینند؟

جواب: پدر و مادر را یک گروه دو نفره در نظر می گیریم این گروه به همراه ۵ نفر دیگر (۳ پسر و ۲ دختر) به $6! = 720$ طریق دور میز گرد می توانند بنشینند از طرفی اعضا گروه ضرب $2! = 2$ طریق با هم جای می یابند پس طبق اصل ضرب $720 \times 2 = 1440$ است.

مثال ۲) به چه طرق ۵ زن و ۵ مرد می توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه هیچ (دو مردی یا (دو زنی کنار هم قرار نگیرند؟

جواب: ۵ زن به $5! = 120$ صورت می توانند دور میز گرد بنشینند حال بن هر دو زن باید یک مرد قرار گیرد که این ۵ مرد می توانند طبق ترتیب جائگیت به ۵! هم جایگاهشان را عوض کنند پس طبق اصل ضرب $120 \times 5! = 28800$

ترکیب: فرض کنید X مجموعه ای از n شیء متمايز باشد در اینصورت هر زیر مجموعه r عضوی ($0 \leq r \leq n$) از X را یک $(r-)$ ترکیب (گزینه) قلمبندیم که در $(n-r-)$ ترکیب مرتب هم نیست. تعداد $r-)$ ترکیب های n عضوی X با علامت $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده می شود و طبق ترتیب $P(n,r) = C(n,r) \times r!$ در اینصورت

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

مثال ۴ از میان ۹ عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی و ۱۱ عضو هیئت مدیره دانشکده کامپیوتر قرار است کمیته ای تخصصی متشکل از ۳ عضو هیئت علمی ریاضی و ۴ عضو هیئت مدیره کامپیوتر تشکیل شود به چند طریق این عمل ممکن است؟

تعداد انتخاب ۴ هیئت مدیره کامپیوتر $\binom{11}{4}$ تعداد انتخاب ۳ هیئت علمی ریاضی $\binom{9}{3}$: حاصل

$$\text{جواب} \quad \binom{9}{3} \times \binom{11}{4} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \times \frac{11!}{(11-4)4!}$$

مثال ۴ به چند طریق میان ۱۲ کتاب را در یک قفسه چیدمان می‌کنیم که ۵ کتاب در آن به شصت هجده مجاور یکدیگر قرار بگیرند.

حل: ابتدا ۵ کتاب به نامشخص را در قفسه چیدمان می‌کنیم که برابر ۷! حالت است.
 نهمه کتاب که بین و خارج ۵ کتاب چیده شده است، هفت کتاب است که میان کتاب به "شخص" را در این هفت کتاب قرار داد این جواب مسئله: $7! \times \binom{16}{7}$

سبب دوجمله‌ای نیوتن: اگر x و y دو متغیر و n عددی صحیح و مثبت باشد آنگاه:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

مثال سبب $(x+y)^4$ را بسازید

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4$$

$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4$$

نویسند که مشتق

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \quad \text{است معادل شد}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

۴۰ (۵)

نقص: ① تعداد جواب صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ برابر $\binom{k+n-1}{n-1}$ است

② تعداد جواب صحیح و نامنفی نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$ برابر $\binom{k+n}{n}$ است

③ تعداد حالت بسط صید معدی $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k$ برابر $\binom{k+n-1}{n-1}$ است

در تمام حالات فوق n عددی طبیعی و k عددی صحیح و نامنفی است

مثال: معادله $x + y + z = 13$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد

تعداد جواب $k = 13 \rightarrow \binom{13+3-1}{3-1} = \binom{15}{2}$ $n = 3$ $\begin{matrix} \nearrow \\ 2 \text{ عدد } x \end{matrix}$

مثال: تعداد جواب صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را بگردانید. $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 2, x_3 \geq 1, x_4 \geq 3$

حل: قرار دهیم: $x'_1 = x_1 \geq 0, x'_2 = x_2 - 2 \geq 0, x'_3 = x_3 - 1 \geq 0, x'_4 = x_4 - 3 \geq 0$
 $\rightarrow x = x'_2 + 2, x_3 = x'_3 + 1, x_4 = x'_4 + 3$

در نتیجه $x'_1 + (x'_2 + 2) + (x'_3 + 1) + (x'_4 + 3) = 20$

$\binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3}$ $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 14$ $\therefore$ لذا تعداد جواب $\binom{17}{3}$

نکته: ضریب جمله $(k+1)$ ام بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ برابر است با:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

مثال: ضریب جمله دوازدهم بسط $(x+y)^{25}$ چیست؟

$$12 = k+1 \rightarrow k=11 \rightarrow T_{12} = \binom{25}{11} x^{25-11} y^{11} = \binom{25}{11} x^{14} y^{11}$$

مثال: ضریب $x^{12} y^{13}$ در بسط $(x+y)^{25}$ چیست؟

حل: طبق فرمول بسط دو جمله‌ای داریم:

$$C(25, 12) = \frac{25!}{12! \times (25-12)!} = \frac{25!}{12! \times 13!}$$

مثال: ضریب $x^{12} y^{13}$ در بسط $(2x-3y)^{25}$ چیست؟

$$(2x-3y)^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k} \cdot (-3y)^k$$

داده است که k باید ۱۳ باشد تا $x^{12} y^{13}$ ایجاد شود پس:

$$x^{12} y^{13} \text{ ضریب} = \binom{25}{13} x^{25-13} (-3)^{13} = \frac{25!}{13! \times 12!} (2)^{12} (-3)^{13}$$

قضیه: تدریج k شئی در n جعبه متمايز: تعداد طریقی که می‌توان k شئی یکسان را در n جعبه متمايز

توزیع کرد بطوریکه بتوان در هر جعبه بیش از یک شئی قرار داد برابر است با: $\binom{n+k-1}{n-1}$

مثال: v شئی یکسان را به چند طریق می‌توان در r جعبه قرار داد بطوریکه در هر جعبه بیش از یک شئی قرار داده نشود.

$$k=v \quad n=r \quad \binom{r+v-1}{r-1} = \binom{9}{2}$$

پس این شئی یکسان می‌تواند به ۹ جایگاه آنجا هم حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود در نتیجه کل حالت

$$\binom{9}{2} \times 1 = \binom{9}{2}$$

اصل لانه کبوتری: $(n+1)$ کبوتری خواهند در n لانه قرار گیرند، آن گاه حداقل یک لانه نشانی بیش از یک کبوتر خواهد بود

مثال: با استفاده از اصل لانه کبوتری می‌توان نشان داد که عبارات زیر درست است.

- الف) در بین ۳ نفر حتماً دو نفر با جنسیت یکسان وجود دارد.
 ب) در بین ۳۱ نفر حتماً دو نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند.
 ج) در بین حداقل ۸ نفر حتماً دو نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند.

تقسیم اصل لانه کبوتری: فرض کنید m کبوتر به سوی n لانه حرکت می‌کنند. می‌توانیم بدانیم به هر لانه چند کبوتر برود، به طریقی هیچ لانه‌ای بدون کبوتر نماند.

- الف) اگر $n = m$ باشد (تعداد کبوتران و لانه‌ها برابر باشد) آنگاه به هر لانه دقیقاً یک کبوتر می‌رود.
 ب) اگر $m > n$ (تعداد کبوتران بیشتر از تعداد لانه‌ها باشد) آنگاه "حداقل" یک لانه وجود دارد که "حداقل" دو کبوتر به آن می‌رود.

مثال: نشان دهید اگر ۵ عدد متمایز از بین اعداد ۱ تا ۸ انتخاب شوند آنگاه جمع ۲ تا از آنها ۹ می‌شود.

حل: اعداد ۱ تا ۸ را به چهار دسته $\{1, 8\}$ ، $\{2, 7\}$ ، $\{3, 6\}$ ، $\{4, 5\}$ تقسیم می‌کنیم. مجموع هر دسته ۹ می‌شود. ۵ عدد با مجموع ۹ می‌باشد، این ۴ دسته ۴ لانه است و اگر یک کبوتر وارد آنها شوند (یعنی ۵ عدد انتخاب شود) آنگاه ۲ تا از آنها وارد یک لانه می‌شوند. مجموع آنها ۹ خواهد بود.

مثال: نشان دهید اگر ۲۰ نفر هگی با هم در هر تعداد که بخواهند با هم دست دهند، آنگاه حداقل ۲ نفر از آنها بطور مساوی دست داده‌اند.

حل: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ مجموعه افراد و $B = \{1, 2, \dots, 19\}$ تعداد دست دادن باشد (حداقل تعداد دست دادن ۱ و حداکثر ۱۹ می‌باشد). A را کبوترها، B را لانه‌ها در نظر بگیریم. چون $|A| > |B|$ (تعداد A بیشتر از تعداد B)، پس حداقل ۲ نفر به تعداد مساوی دست داده‌اند.

صورت‌های اصل لانه کبوتری: الف) اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم آنگاه حداقل

یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ کبوتر وجود دارد. (را بخوانید خبر، ص ۳۳)

ب) اگر $(k+1)$ کبوتر و n لانه داشته باشیم، در انبساط حداقل یک لانه وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر دارد.

②

④

ج. اگر m کبوتر n لانه داشته باشیم و $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = k$ ، آنگاه کمترین مقدار m برابر $m = n(k-1) + 1$ است.

مثال، رنگ ای ۶ لره قرمز، ۴ لره آبی، ۱ لره زرد و ۵ لره بنفش است. چند لره از رنگ بیرون
بیادیم تا مقصود باشیم که: الف، حداقل ۴ لره هر رنگ خواهیم داشت
ب، حداقل ۶ لره هر رنگ خواهیم داشت.

حل: الف $n = 4$ عدد، k ، $k+1$ متساوي و $k+1 = 4$ (مساوي $k=3$) $k=3$ متساوي

$$m = kn + 1 = r \chi_{\ell} + 1 = 1r$$

$m = kn + 1 = 1 \times 5 + 1 = 6$
 (ب) اگر هر دو به سمت

مشرق	آب	رود	نهر
۵	۴	۳	۲

 آبی باشند ۴ نهر هر یک خواص را است پس
 باید حداقل یک نهر دیگر از یک بیرون بیاید که مطمئن نهر بیرون آمده زرد یا قرمز خواهد بود
 بنابراین اگر ۲۰ نهر از یک بیرون بیاید مطمئن هستیم که حداقل ۴ نهر هر یک عدد دارد
 راه دیگر: تعداد نهر آبی و سبز کمتر از ۴ است اگر این دو خانه را کنار بگذاریم که نهر فقط زرد و قرمز
 می باشد مانند $n = 2$ و $k = 5$ خواص را است $m = kn + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$ و این امکان
 دارد هر دو بیرون آمده آبی یا سبز باشد بنابراین جمع $11 + 4 + 5 = 20$ پس اگر ۲۰ نهر از یک
 بیرون بیاید حتماً حداقل ۴ نهر هر یک هستند

مثال، حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در فضای $\mathbb{R}^3$ بردی انتخاب کنیم تا همگی هم‌خط باشند.

مجموعات و سبب آنه نیز عدد صحیح است.

نقطات وسطه ای نیز عدد صحیح است:

حل: اگر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) دو نقطه در فضای اقلی باشد،

وسطه آن عبارت از:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

از عرضی دیگر یک تقصیر با مختصات (x, y, z) از نظر زنجیر یا نمودارین مولف دارای

۱ حالت است (تعداد لایه n). (میزبان شکل) (روز، روز، روز) (روز، روز، روز) ...
 ۹ حالت (تعداد لایه n). (میزبان شکل) (روز، روز، روز) (روز، روز، روز) ...
 ۹ حالت (تعداد لایه n). (میزبان شکل) (روز، روز، روز) (روز، روز، روز) ...

اگر ۹ نقطه در صفحه انتخاب کنیم مثلثی
و منصفه وسط آن عددی صحیح است

مثال: کتابخانه مرکزی دانشگاه رازی ۹۸۲۵۳ جلد کتاب به جمع لایحه رشته‌های مختلف می‌باشد اگر قرار باشد این کتاب که ۳۳۰ ردیف بچسبند در اسفندت یکی از ردیف‌ها باید حداقل ۳۳ جلد کتاب باشد.

$$\text{ص: } \left[\frac{98253}{330} \right] = 298$$

مثال: از یک مدرسه چند نفر انتخاب شوند که مجموع یا حداقل سال تولدشان معصوم از ۱۰ باشد. رقم کفایت اعداد انتخاب شده یکی از اعداد ۰ تا ۹ می‌باشد باقی‌مانده بخشیدن اعداد بر ۱۰ شش (لانه) دسته شد: (۵,۵) (۱,۹) (۲,۸) (۳,۷) (۴,۶) شش اعداد را دارد. بنابراین حداقل افراد (کبوتر) (نمای از این حدس برابر است):

$$m = n(k-1) + 1 = 6(2-1) + 1 = 7$$

توابع مولده: اگر $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد سری توانی

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ تابع مولده (تابع مولده معمولی) دنباله مولده باشد. فرض کنید a_n تعداد راه‌های مختلف برای انتخاب n شیء در یک مجموعه ترکیبیاتی باشد. در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولده (معمولی) آن مجموعه ترکیبیاتی باشد.

مثال: محاسبه سری از تابع مولده

الف) تابع مولده دنباله $a_n = 3^n$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

ب) تابع مولده دنباله $b_n = n+1$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

ج) تابع مولده دنباله $c_n = 1$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots = \frac{1-x^8}{1-x}$$

د) تابع مولده دنباله $d_n = \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

نکته: (مجموعه‌ای از فرمول‌ها)

مثال اگر $1 < x < 1$ باشد از $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = (1-x^{n+1})$ ساده است

$$1 = (1-x)(1+x+x^2+\dots)$$

و در نتیجه $1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ حاصل می شود در نتیجه تابع مولد ریشه $1, x, x^2, \dots$ است $\frac{1}{1-x}$

ب) اگر از طرفین ساده $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مشتق می گیریم داریم

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1+2x+3x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

بنابراین $\frac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولد ریشه $1, 2, 3, 4, \dots$ است

ج) اگر طرفین رابطه $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots$ را در عامل x ضرب کنیم

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots$$

در نتیجه $\frac{x}{(1-x)^2}$ تابع مولد $1, 2, 3, 4, \dots$ خواهد بود

د) با مشتق گرفتن مجدد از طرفین قسمت (ج) خواهیم داشت $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ تابع مولد

ریشه $1^2, 2^2, 3^2, \dots$

ه) مشابه تکنیک قسمت (ج) $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ تابع مولد $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$ است

مثال تابع مولد ریشه $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$ را بساز

$$a_0 = 0 = 0^2 + 0$$

$$a_1 = 1 = 1^2 + 0$$

$$a_2 = 4 = 2^2 + 0$$

$$a_3 = 9 = 3^2 + 0$$

$$a_4 = 16 = 4^2 + 0$$

$$a_5 = 25 = 5^2 + 0$$

$$a_6 = 36 = 6^2 + 0$$

$$a_7 = 49 = 7^2 + 0$$

$\vdots$

با توجه به این بدات بالا داریم $a_n = n^2 + n$ که a_n جمع دو ریشه n^2 و n است

است بنابراین تابع مولد a_n جمع دو تابع مولد ریشه n^2 و n است که به ترتیب

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

مثال قبلی داریم

مثال: کتابخانه مرکزی دانشگاهی دارای ۹۸۲۵۳ جلد کتاب به جمع لایق رشته‌های مختلف می باشد اگر قرار باشد این کتاب که دارد ۳۳۰ ردیف بچیند در اسفندت کی از ردیف باید حداقل کتاب باشد؟

$$\text{حل: } \left\lceil \frac{98253}{330} \right\rceil = 298$$

مثال: از یک مدرسه چند نفر انتخاب شوند که مجموع باقی‌مانده سال تولدشان معبری از ۱۰ باشد. رقم کفایت اعداد انتخاب شده کی از اعداد ۰ تا ۹ می باشد باقی‌مانده بچیند اعداد ۱۰ شش (لانه) دسته شد (۱۰، ۵) (۵، ۵) (۱، ۹) (۲، ۸) (۳، ۷) (۶، ۴) شرط است را دارد. بنابراین حداقل افراد (کبوتر) (نهی از این حدس برابر است):

$$m = n(k-1) + 1 = 6(2-1) + 1 = 7$$

توابع مولد: اگر $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد سری توان

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

مقرر کنید a_n مدار راه‌های مختلف برای انتخاب n شی در یک مجموعه ترکیبیاتی باشد در انصورت سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد (مولد) آن مجموعه ترکیبیاتی باشد

مثال: محاسبه سری از تابع مولد

الف: تابع مولد دنباله $a_n = 3^n$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

ب: تابع مولد دنباله $b_n = n+1$ عبارت از $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

ج: تابع مولد دنباله از اعداد اعداد برابر است:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots = \frac{1-x}{1-x}$$

د: تابع مولد دنباله $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$ عبارت از

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

طبق قضیه دوهمی این سری

نوعه: اگر در $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$ بی n مقدار n - تکرار

داریم: $\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$

که برای $k > n$ (که $n \in \mathbb{N}$) داریم $\binom{n}{k} = 0$

اگر $|x| < 1$ باشد داریم: $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$

اگر بی x تکرار دهیم $-x$ داریم: $\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$ (*)

مثال: ضریب x^v در $\frac{1}{(1-x)^4}$ چیست؟

جواب: $k=v$ $n=4 \Rightarrow$ ضریب $x^v = \binom{4+v-1}{v} = \binom{4+v}{v} = \binom{4+v}{4}$ (*)

مثال: ضریب x^{15} در $(x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^4$ چیست؟

$(x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^4 = (x^2)^4 (1 + x^2 + x^4 + \dots)^4 = x^{10} (1 + x^2 + x^4 + \dots)^4 = \frac{x^{10}}{(1-x^2)^4}$

برای ضریب x^{15} لازم است ضریب x^5 را در $\frac{1}{(1-x^2)^4}$ اعمال کنیم. مگر باید

تکرار را در $k=9, n=4$ نتیجه می‌گیریم: $\binom{4+9-1}{9} = \binom{13}{9} = \binom{13}{4} = 715$

فرضیه: اگر a_k ضریب x^k در $g(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots)^n$ باشد آنگاه

$a_k = \binom{n+k-1}{n-1}$

موفق باشید

تقریب گزاره: گزاره یک جمله ساده خبری است که به حقیقت رسیده و تجربه نمی شود و دارای ارزش درست یا نادرست است.

گزاره را با حروف $p, q, r, \dots$ نمایش می دهند برای گزارش درست از حرف T (true) و یا عدد ۱ و برای گزارش نادرست از حرف F (False) یا عدد ۰ نیز استفاده می شود.

مثال: کدامیک از عبارات زیر گزارشی هستند، ارزش گزاره چیست:

۱: مربع خورشید منقوشه شمس است.

۲: علی حامی یک کارگردان سینمای ایران است.

۳: آن سارم را حساب کن.

۴: در من ریاضی گسته آسان است.

حل: ۱ گزاره با ارزش درست است T ۲ گزاره با ارزش درست است T ۳ گزاره با ارزش درست است T ۴ گزاره نیست (جمله امری است خبری) z گزاره نیست زیرا آن یک بیان قریف شده است.

گزاره نما: اگر گزاره ای شامل تغییر باشد و به ازای بعضی مقادیر متغیر، ارزش درست T و به ازای برخی دیگر ارزش نادرست F شود آنرا گزاره نما گویند. برای نمایش گزاره نما x عددی اول است. از عبارات $p(x)$ یا $q(x)$ یا $r(x)$ استفاده می شود.

مثال: $x=11$ یک گزاره نما است زیرا x برای $x=1$ درست و به ازای $x=0$ نادرست می شود.

گزاره مرکب: گزاره ای است که از ترکیب گزاره های ساده با استفاده از روابط منطقی حاصل می شود.

جدول درستی: هر گزاره ساده دارای ارزش T یا F است می بینیم

نقیض یا نفی یک گزاره: نقیض گزاره P را با عبارت $\neg P$ یا $\sim P$ نمایش می دهیم.

ارزش آن مخالف ارزش گزاره P است پس اگر P درست باشد $\sim P$ نادرست و برعکس.

P	$\neg P$
T	F
F	T

مثال، نقیض گزاره P یک نام متغیر معتبر در زبان C است.

حل: چنین نیست که متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C است.
 عبارت دیگر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C نیست.

ترکیب عطفی: اگر P و Q دو گزاره باشند ترکیب عطفی آن را با علامت $P \wedge Q$ نشان داده میشود. $P \wedge Q$ زمانی ارزش درست دارد که هر دو گزاره P و Q درست باشند در غیر اینصورت ارزش آن نادرست است.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

یعنی اگر از P و Q یکی نادرست باشد یا هر دو نادرست آنگاه $P \wedge Q$ نادرست است.

ترکیب فصلی: اگر P و Q دو گزاره باشند ترکیب فصلی

آن را با علامت $P \vee Q$ نشان میدهم. هنگامی ارزش درست دارد که حداقل یکی از P و Q یکی درست باشد پس اگر هر دو نادرست باشند $P \vee Q$ نادرست است.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ترکیب NAND: اگر P و Q دو گزاره باشند ترکیب NAND دو گزاره با $P \uparrow Q$ نشان داده میشود این ترکیب در حقیقت نقیض ترکیب عطفی یک گزاره ترکیب است.

$$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$$

میدان ارزشی آن: جدول درست نادرست

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

ترکیب NOR: این ترکیب با علامت $P \downarrow Q$ نشان داده میشود. در حقیقت NOR نقیض فصلی ترکیب است.

P	Q	$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول درستی $P \leftrightarrow q$:

نکته مهم : عملگرهای منطقی نسبت به یکدیگر دارای اولویت هستند (جدول زیر) . غیر از این از پرانتز استفاده می‌شود
مستثنای این برای اولویت استفا در جدول

اولویت	عملگر
اول	$\sim$
دوم	$\wedge$
سوم	$\vee$
چهارم	$\rightarrow$
پنجم	$\leftrightarrow$

مثال : اگر ارزش گزاره‌های P, Q, R به ترتیب T, T, F باشد ارزش گزاره‌های زیر را بدست آورید

الف) $P \rightarrow Q \vee R$

ب) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

حل : با توجه به اولویت عملگرها خواهیم داشت

الف) $P \rightarrow Q \vee R \equiv T \rightarrow T \vee F \equiv T \rightarrow T \equiv T$

ب) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \equiv (T \rightarrow (T \rightarrow F)) \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv (T \rightarrow F) \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv F \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv F \rightarrow F \equiv T$

مثال : اگر گزاره‌های P, q, r به ترتیب دارای ارزش T, F, T باشند، ارزش گزاره‌های زیر را بدست آورید

الف) $(\sim P \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

ب) $(P \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \leftrightarrow P)$

الف) $(\sim P \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (\sim T \leftrightarrow \sim F) \rightarrow (T \leftrightarrow F) \equiv (F \leftrightarrow T) \rightarrow (T \leftrightarrow F) \equiv F \leftrightarrow F \equiv T$

ب) $(P \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \leftrightarrow P) \equiv (T \rightarrow \sim F) \rightarrow (T \leftrightarrow T) \equiv (T \rightarrow T) \rightarrow (T) \equiv T \rightarrow T \equiv T$

ترکیب XOR : آرایه‌ها $p \oplus q$ نشان می‌دهد برای ترکیب OR (محصول نه گفته شود)
 ارزش این ترکیب وقتی درست است که از بین دو گزاره، یکی درست باشد و دیگری نادرست باشد. اگر p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، $p \oplus q$ نادرست خواهد بود.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ترکیب شرطی: اگر p و q دو گزاره باشند ترکیب شرطی آنها
 با نماد $p \rightarrow q$ نشان می‌دهد ارزش گزاره
 شرطی $p \rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

p درست و q نادرست باشد در باقی حالات این ترکیب ارزش درست دارد.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

در این ترکیب p را مقدم و q را مانی مانند گفته شد
 "اگر p آنگاه q "
 یا اینکه p شرط کافی برای q است، یا اینکه q شرط لازم برای p است.

ماتریس جدول اگر تالی (q) نادرست باشد داریم $p \rightarrow q$ به انتفا مقدم درست است
 یعنی نیازی به بررسی ارزش p ندارد.

عکس نقیض: گزاره $p \rightarrow q$ را عکس گزاره $q \rightarrow p$ گویند و گزاره $\sim q \rightarrow \sim p$
 عکس نقیض گزاره $p \rightarrow q$ است.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

ماتریس جدول که به سیستم گزاره شرطی $p \rightarrow q$
 با عکس نقیض آن هم ارزش است
 و گزاره شرطی و عکس آن وقتی هم ارزش هستند
 وقت مقدم تالی p هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

ترکیب دو شرطی: گزاره گزاره p و q ترکیب دو شرطی آنها با نماد $p \leftrightarrow q$ نشان داده می‌شود
 اگر p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند گزاره دو شرطی $p \leftrightarrow q$ را درست می‌گویند
 درست است. این ترکیب بصورت "اگر و فقط اگر" یا p شرط لازم کافی برای q است بیان می‌شود.

استنتاج : تعرف اگر با داشتن گزاره‌ی درست $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ بتواند درستی گزاره q را نتیجه گرفتند پس استنتاج

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \rightarrow q$ معتبر است و در غیر اینصورت معتبر نیست
استنتاج غلط را بصورت زیر نشان میدهیم

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

و گاهی نیز بصورت $p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$ نشان داده میشود

قوانین مهم استنتاج :

۱- قوانین ترکیبات عطفی :

(۱) ترکیب عطفی

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

(۲) ساده سازی عطفی

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

(۳) ساده سازی عطفی

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

۲- قوانین ترکیبات فصلی :

(۴) ادخال فاصل

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

(۵) ادخال فاصل

$$\begin{array}{c} q \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

(۶) قیاس فصلی

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

۳- قوانین ترکیبات شرعی :

(۷) اشتراع

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

(۸) نقض اشتراع

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

(۹) قاعده شاقص

$$\begin{array}{c} \sim p \rightarrow F \\ \hline \therefore p \end{array}$$

(۱۰) قانون تعدی

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

(۱۱) اثبات بوسیله حالات

$$\begin{array}{c} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$$

استدلال منطقی: اگر P و q گزاره‌های دلخواه باشند به طوری که $P \rightarrow q$ حقیقت درست باشد
 آنگاه گویند که P به طور منطقی مستلزم q است و به صورت $P \Rightarrow q$
 نشان داده میشود (به فلش یک خط و فلش دو خط توجه کنید)

مثال: فرض کنید، گزاره‌ای زیر وجود دارند

P : علی مطالعه می‌کند
 q : علی تنیس بازی می‌کند
 r : علی در امتحان کلاس قبول میشود
 حالا گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید
 اگر علی مطالعه کند، آنگاه در امتحان کلاس قبول میشود $(P \rightarrow r)$
 اگر علی تنیس بازی نکند، آنگاه مطالعه خواهد نمود $(\sim q \rightarrow P)$
 علی در امتحان کلاس رد شد $(\sim r)$

آیا فرض گزاره‌ای q $(P \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow P) \wedge \sim r \rightarrow q$ استدلال منطقی است؟

برای این منظور جدول گزاره‌ای زیر را تشکیل می‌دهیم

P	q	r	$P \rightarrow r$	$\sim q \rightarrow P$	$\sim r$	$(P \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow P) \wedge \sim r$	$((P \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow P) \wedge \sim r) \rightarrow q$
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

همیشه درست

توجه کنید به شیوه P و q و r نیست به هم از نظر
 درستی یا نادرستی هست حالت دارند

مثال: با تشکیل جدول نشان دهید گزاره زیر یک استدلال منطقی است

$$(P \vee q) \wedge (P \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow r$$

مثال: نشان دهید استنتاج زیر درست است

$$\begin{array}{l} P \rightarrow q \quad (ب) \\ r \rightarrow s \\ \hline \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \sim p \vee \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (الف) \\ P \wedge q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

حل: (الف)

$$\begin{array}{l} 1) \\ P \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \\ P \wedge q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \\ P \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \hline \therefore q \rightarrow r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \\ q \rightarrow r \\ q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

قانون ترکیب عطفی (1)
قانون ترکیب عطفی (2)

استنتاج

استنتاج

$$\begin{array}{l} 1) \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore q \rightarrow \sim s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \\ r \rightarrow s \\ \hline \therefore \sim s \rightarrow \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \\ P \rightarrow q \\ q \rightarrow \sim s \\ \hline \therefore P \rightarrow \sim s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) P \rightarrow \sim s \\ \sim s \rightarrow \sim r \\ \hline \therefore P \rightarrow \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5) \\ P \rightarrow r \\ \hline \therefore \sim P \vee r \end{array}$$

درباره ریاضیات (استنتاج)

۱- روش مستقیم: باید داریم برای این استوار است که هر گزاره‌ای با یکدیگر تقصیر دارند

$$P \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim P \quad \text{هم‌ارز است نفی}$$

مثال: فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ نشان دهید اگر n^2 فرد باشد آنگاه n نیز فرد است

حل: بکنیم تقصیر گزاره بالا را نفی «اگر n زوج باشد آنگاه n^2 زوج است» را اثبات

می‌کنیم. هر عدد زوج بصورت $n = 2k$ (k عدد صحیح) نشان می‌دهند

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad \text{ما فرض } 2k^2 = k' \text{ داریم} \quad n^2 = 2k' \text{ پس زوج است. (اثبات)} \quad \text{مکتم}$$

برهان خلف: در این روش درستی مفروضات تغییر نمی‌کند بلکه فرض می‌کنیم

کامی نادرست باشد و آنرا بصورت یک فرض جدید به مفروضات قبلی اضافه می‌کنیم با

فرض های جدید نشان می‌دهیم منقول گزاره‌ای همواره نادرست است.

مثال ۱: به کمک براهین خلف نشان دهید اگر ۲۲ روز را در نظر بگیریم حداقل ۴ روز از آن در یک روز هفته خواهد بود.
 اثبات: با فرض ۳ روز هر یک حداقل ۳۳ روز از ۲۲ روز در یک روز هفته باشد (مثلاً هفته ۱ از آنجا که در هفته ۷ روز و هر روز در رتبه باقی‌ماند ۲۱ روز، حداقل ۳ روز در یک روز هفته تکرار خواهند داشت این مخالف فرض اولیه است.

مثال ۲: به کمک براهین خلف نشان دهید اگر $(3n+2)$ فرد باشد آنگاه n نیز فرد است.
 اثبات: فرض کنیم n فرد باشد یعنی n زوج باشد پس عدد k وجود دارد که $n=2k$ پس داریم: $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1) = 2k'$ که خلاف فرد بودن $(3n+2)$ است. در نتیجه حکم درست است یعنی n فرد است.

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که در آن n یک عدد صحیح مثبت را نشان می‌دهد که یک یا چند بار ظاهر شده باشد.
 الف) اگر $S(1)$ درست باشد و ب) اگر به ازای هر k درخواه $S(k)$ درست باشد آنگاه $S(k+1)$ نیز درست باشد، آنگاه $S(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است.

مثال ۳: به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت کنید $\sum_{k=1}^n k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

اثبات: تکرار دهید $n=1$ داریم $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ (درست)

فرض کنید $n=k$ نیز درست باشد یعنی $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (*)

حال نشان دهید اگر $n=k+1$ آنگاه نیز درست است یعنی

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (**)$$

بر مبنای نتایج (*) و (**), را اثبات کنید داریم

$$1+2+\dots+k+(k+1) = (k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{2(k+1) + k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

پس با توجه به (*) و (**) حکم تکراراً درست است در نتیجه $S(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است.

اصل استقرای قوی (متناهی) : فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که حاوی یک یا چند بار عنصر شمریم و مثبت n است. هر چنین فرض کنید $n_0 \leq n, n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$

الف) اگر $S(n_0), S(n_0+1), S(n_0+2), \dots, S(n_1-1), S(n_1)$ درست باشد و

ب) اگر برای هر k خاص و دلخواه از $\mathbb{Z}^+$ و $k \geq n_1$ وقتی $S(n_0)$ درست باشد

$S(n_0+1), S(n_0+2), \dots, S(k-1), S(k)$ درست باشد آنگاه

$S(k+1)$ نیز درست باشد آنگاه $S(n)$ برای هر $n \geq n_0$ درست است

مثال) یک دیوی کامپیوتری پس از گذشت n ساعت، تعداد p_n کامپیوتر را آلوده

می‌کند. اگر $p_0 = 2$ و $p_1 = 7$ و برای هر $n \geq 2$ داشته باشیم

$$p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2} \quad (*)$$

$$p_n = 2^{n+2} - 1 \quad (**)$$

برای $n=0$: $p_0 = 2^{0+2} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ درست
 برای $n=1$: $p_1 = 2^{1+2} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ درست

با این فرض که برای هر عددی باشد $k \in \mathbb{Z}^+$ که در آن $k \geq 1$ است گزاره $S(n)$ را در نظر بگیریم :
 $S(0), S(1), \dots, S(k-1), S(k)$ درست باشد حالت $n = k+1 \geq 2$

$$p_{k+1} = 3p_k - 2p_{k-1} = 3 \binom{k+2}{2-1} - 2 \binom{(k-1)+2}{2-1} \quad (\text{به } (*) \text{ توجه کنید})$$

$$= 3 \times 2^{k+2} - 2 \times 2^{k+1} = 3 \times 2^{k+2} - 2 \times 2^{k+1} = 2^{k+2} \times 3 - 2^{k+1} \times 2 = 2^{k+2} \times 3 - 2^{k+2} = 2^{k+2} \times (3-1) = 2^{k+2} \times 2 = 2^{k+3}$$

به $(**)$ توجه کنید : $2^{(k+1)+2} - 1 = 2^{k+3} - 1$

در نتیجه، اصل استقرای قوی ریاضی $S(n)$ برای هر $n \geq 0$ درست است.

ترتیب حل شده:

۱. مکس نفیق هر یک از گزاره های زیر را به دست آورید

الف) اگر x کوچکتر از y باشد، آنگاه x مثبت نیست. $\{ \text{یکه } p: x \text{ مثبت است} \}$

ص: مکس نفیق $p \rightarrow \sim q$ گزاره $q \rightarrow \sim p$ است پس مکس نفیق می شود.
"اگر x مثبت است آنگاه x کوچکتر از y نیست"

ب) شما اگر اخلاقی نباشید، موفق می شوید. ص: اگر اخلاقی نباشید آنگاه موفق می شوید.
ج) بر سر صفتی بودن، لازم است مثل مربع باشد. ص: اگر مثل صفتی نباشد آنگاه مربع

۲. تحقیق کنید که گزاره

$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$ یک گزاره همیشه درست است

ص: به کمک جدول ارزش

p	q	r	$p \vee r$	$q \rightarrow (p \vee r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T

۳. فرض کنید p, q, r گزاره های دلخواهی باشند، هم ارز های زیر را نشان دهید

$$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \equiv \sim p \vee (q \wedge r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r) \end{aligned}$$

قانون ترکیب

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$\text{ص: } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\equiv \sim (p \vee q) \vee r \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

رابطه و تابع :

زوج مرتب : هر دو شی که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار یکدیگر حائز اهمیت باشد
 اگر از زوج مرتب گویند : زوج مرتب را معمولاً باغاد (a, b) نشان میدهند
 اگر $a \neq b$ باشد آنگاه $(a, b) \neq (b, a)$ ، a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم زوج (a, b) گویند.

n تایی مرتب : یک n تایی مرتب از n شی که ترتیب قرار گرفتن آنها در کنار یکدیگر مهم
 می باشد تشکیل شده است . مانند $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
 توجه : در n تایی مرتب وقتی ما می بینیم مؤلفه نظیر به نظیر آنها با هم یکسان باشند.

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه : فرض کنید A و B دو مجموعه باشند حاصلضرب آنها را باغاد
 $A \times B$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم
 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ و } y \in B\}$
 توجه : در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$

توجه : اگر تعداد عنصر A برابر n و تعداد عنصر B برابر m باشد آنگاه

$$|A \times B| = |B \times A| = mn \quad (|A| = \text{تعداد عنصر } A)$$

تعریف رابطه : هر زیر مجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A در B گویند معمولاً رابطه را

با حرف R نمایش می دهیم $R \subseteq A \times B$. در یک رابطه ، $(a, b) \in R$

به این معنی است که R زیر مجموعه از $A \times B$ است که در آن $a \in A$ و $b \in B$ است

$(a, b) \in R$ را با $a R b$ نیز نشان می دهند . $a R b$ نشان می دهد زوج (a, b) در

رابطه R دربر ندارد یعنی $(a, b) \notin R$ به مجموعه مؤلفه اول یک رابطه "دائمه"

به مجموعه مؤلفه دوم آن "بردار" گویند.

رابطه روی یک مجموعه : یک رابطه از A در A را یک رابطه روی A گویند (یعنی اگر $A=B$ باشد)

مثال : فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد اگر R مجموعه تشکیل از تمام زوج های مرتبی باشد که

a بقسم علی b است . عناصر R عبارتند از :

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3), (2,4), (4,4)\}$$

(یعنی طوری که a بخش پذیر است)

مثال : رابطه زیر روی مجموعه اعداد صحیح شده اند

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\} \quad R_2 = \{(a, b) \mid a \geq b\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a = b\} \quad R_4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$$

$$R_5 = \{(a, b) \mid a = |b|\} \quad R_6 = \{(a, b) \mid a + b > 2\}$$

(بقیه در صفحه ۱۳)

$$P \vee P \equiv P \rightarrow P \wedge P \equiv P$$

$$P \vee F \equiv P \quad P \wedge T \equiv P \quad \text{فراصل گزاره ها:}$$

$$P \vee T \equiv T \rightarrow P \wedge F \equiv F$$

$$P \vee \sim P \equiv T \rightarrow P \wedge \sim P \equiv F \quad \text{قضایه های ادا کردن}$$

$$P \vee q \equiv q \vee P \quad P \wedge q \equiv q \wedge P \quad \text{جابجایی}$$

$$P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r \quad P \wedge (q \wedge r) \equiv (P \wedge q) \wedge r \quad \text{شرکت پذیری}$$

$$P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r) \quad P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r) \quad \text{توزیع پذیری}$$

$$P \vee (P \wedge q) \equiv P \quad P \wedge (P \vee q) \equiv P \quad \text{جذب}$$

$$\sim(P \vee q) \equiv \sim P \wedge \sim q \quad \sim(P \wedge q) \equiv \sim P \vee \sim q \quad \text{دوگان}$$

$$\sim(\sim P) \equiv P \quad \text{نقض مضاعف}$$

نشان بده که حاصل جمع یک عدد زوج با یک عدد فرد، عددی فرد است

$$n = 2k \quad m = 2k' + 1 \rightarrow n + m = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2\tilde{k} + 1 \quad \text{فرد}$$

نشان بده که برای هر $n \geq 4$ ثابت کن که $n! \geq 2^n$

حل: به کمک استقرا ریاضی: $n=4$ را بررسی کن. $4! = 24 \geq 16 = 2^4$

$$4! = 24 \quad 2^4 = 16 \rightarrow 24 \geq 16$$

فرض کن که $n=k$ برقرار است. نشان بده که $n=k+1$ نیز درست است.

$$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^k \quad (\text{فرض } k! \geq 2^k)$$

از آنجا که $k \geq 2$ داریم $k+1 \geq 2$

$$2^k (k+1) \geq 2 \times 2^k = 2^{k+1} \Rightarrow (k+1)! \geq 2^{k+1}$$

پس برای هر $n \geq 4$ برقرار است.

خواص روابط :

۱- خاصیت بازتابی : در برخی از روابط یک عضو همواره با خودش در رابطه است

رابطه R روی مجموعه A دارای خاصیت بازتابی است هرگاه و تنها هر عضو $a \in A$

داشته باشیم aRa ، یعنی $(a,a) \in R$ $\forall a \in A$

مثال

مثال، رابطه " $\leq$ " یا " $\geq$ " (کوچتر یا مساوی و بزرگتر یا مساوی) ، رابطه بازتابی است زیرا هر عدد کوچکتر یا مساوی خودش است و بزرگتر یا مساوی خودش

۲- خاصیت ضد بازتابی : رابطه R بر مجموعه A دارای خاصیت ضد بازتابی است اگر برای هر عضو $a \in A$

داشته باشیم $(a,a) \notin R$ ، یعنی $\forall a \in A$ ، $(a,a) \notin R$

مثال، مقدار a را در بیابید ، رابطه زیر روی مجموعه

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,a)\}$ خاصیت بازتابی باشد

حل : گامیت $a=3$ باشد در اینصورت زوج $(1,1)$ ، $(2,2)$ ، $(3,3)$ در R قرار گرفته و R بازتابی خواهد شد. نتیجه کنید رابطه فوق ضد بازتابی نیست.

مثال) اصطلاح "عابر کردن" در مجموعه اعداد صحیح به اینصورت است که : عدد a عدد b را عابر

سازد هرگاه b بر a بخش پذیر باشد و یا اگر a عدد b را می شمارد. خاصیت عابر کردن را علامت $a|b$ خاش می دهند.

رابطه عابر کردن روی مجموعه اعداد صحیح متافض خاصیت بازتابی دارد زیرا هر عدد خودش بخش پذیر است.

۳- خاصیت تقارن : رابطه R روی A دارای خاصیت تقارن است هرگاه و تنها هر دو عضو

$a, b \in A$ نتیجه شود که اگر aRb آنگاه bRa ، یعنی :

$\forall a, b \in A$ ، $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

۴- خاصیت ضد تقارن : رابطه R روی مجموعه A دارای خاصیت ضد تقارن است اگر

aRb و bRa نتیجه شود که $a=b$ ، به تعبیر دیگر اگر زوج $(a,b) \in R$ باشد آنگاه $(b,a) \notin R$

عناصر $(2,2), (0,2), (3,0), (1,2), (0,0), (1,-1)$ به یکدیگر از روابط قبل تعلق دارند.

$$\begin{aligned} \text{مثال: } & R_0, R_3, R_4, R_1 \text{ در } (0,0) \text{ / } R_2, R_5, R_6, R_7 \text{ در } (2,2) \\ & R_8, R_9 \text{ در } (1,-1) \text{ — } R_7, R_5 \text{ در } (3,0) \\ & R_4, R_1 \text{ در } (1,2) \text{ — } R_7, R_1 \text{ در } (0,3) \end{aligned}$$

نکته: از آنجایی که هر رابطه روی A یک زیر مجموعه $A \times A$ است بنابراین تعداد رابطه‌های ممکن روی A می‌توان نوشت برابر تعداد زیر مجموعه‌های $A \times A$ است لذا تعداد رابطه‌های ممکن می‌توان روی مجموعه n عنصری A نوشت برابر 2^{n^2} است.

چیز رابطه‌ها: اگر R_1, R_2 دو رابطه از A به B باشند آنگاه خواص زیر برقرارند:

۱) $R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in R_1 \vee (x,y) \in R_2\}$ اجتماع دو رابطه

۲) $R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_2\}$ اشتراک دو رابطه

۳) $R_1 - R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \notin R_2\}$ تفاضل دو رابطه

۴) $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$ جمع جبری دو رابطه

۵) مکمل یک رابطه $R_1^c = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \notin R_1\}$

۶) وارون (معکوس) رابطه $\bar{R}_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid (y,x) \in R_1\}$

مثال: روابط R_1, R_2 روی مجموعه اعداد حقیقی شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$R_1 = \{(x,y) \mid x < y\} \quad R_2 = \{(x,y) \mid x > y\}$$

همین‌طور روابط $R_1 \oplus R_2, R_2 - R_1, R_1 - R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ را بیابید.

$$\text{حل: } R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \mid x < y \vee x > y\} = \{(x,y) \mid x \neq y\}, \quad R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

$$R_1 - R_2 = R_1, \quad R_2 - R_1 = R_2, \quad R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2$$

در خاصیت ضد تقارن داریم: $a = b \rightarrow bRa$ و aRb یعنی با برقراری خاصیت
 ضد تقارن باید از آنکه aRb و bRa نتیجه نگیریم $a = b$ یا از آنکه سمت اول
 شرط برقرار نیست نتیجه خود کل شرط برقرار است (ترکیب شرطی اگر مقدم نادرست باشد نتیجه
 ترکیب درست است) یعنی اگر aRb و bRa سمت اول شرط برقرار نیست
 و در نتیجه کل شرط درست است و خاصیت ضد تقارن برقرار خواهد بود.

مثال) نشان دهید رابطه $a, b \in \mathbb{R}, aRb \Leftrightarrow |a-b| < 1$ در اعداد حقیقی
 خاصیت تقارن دارد.

حل: بدین طریقه خاصیت قدر لطف $|x| = |x-1|$ پس از $|a-b| < 1$ نتیجه بگیریم
 $|b-a| < 1$ در نتیجه اگر aRb آنگاه bRa

مثال) رابطه "عادر کردن" روی اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی) را از جهت خاصیت
 تقارن و ضد تقارن بررسی نمایید.

حل: این رابطه خاصیت تقارن ندارد زیرا اگر $۲ \text{ بر } ۴$ بخش پذیر آنگاه $۴ \text{ بر } ۲$ بخش پذیر نیست
 پس $۲ \nmid ۴$ ولی $۴ \nmid ۲$

این رابطه دارا خاصیت ضد تقارن است زیرا بر دو عدد ۲ و ۴ باید از آنکه $۲ \nmid ۴$ و $۴ \nmid ۲$
 نتیجه نگیریم $۲ = ۴$ چون سمت مقدم شرط درست نیست پس این گزاره شرطی
 در کل را در ارزش درست می باشد.

$۲ \nmid ۴, ۴ \nmid ۲ \rightarrow ۲ = ۴$
 مقدم نادرست

دانشجوی عزیز، لطفاً به سؤالات زیر پاسخ دهید و نتیجه را از واقع و اتس آب اریا کنید.
۱- که اکسید از عیارات در گزاره و کدام گزاره نادرست است.

الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $x^2 \geq 0$ است

ب) کتاب "تحقیقات عاشقانه‌ای بر روی مهری" بی‌ارزش است

ج) حسن آمد و اعداد منفی کمتر از صفرند

ه) اگر x و y اعداد طبیعی باشند آنگاه $x+y > 2$ است.

۲- جدول ارزش گزاره $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$ را تشکیل دهید

۳- در گزاره‌های p, q, r, s به ترتیب دارای ارزش T, F, F, T باشد
ارزش گزاره $(p \vee r) \leftrightarrow \sim s$ را بیابید

$$(p \vee r) \leftrightarrow \sim s$$

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \vee q)$$

$$\sum_{i=1}^n 2 \binom{n-1}{i-1} = 2^n - 1$$

۴- به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید

توجه: تاریخ ۱۵ شهریور ۱۳۹۹، ساعت ۱۲:۲۵

ساعت ارسال ۱۲:۲۵

خاصیت تعدی = رابط R تعریف شده بر روی مجموعه A دارای خاصیت تعدی است اگر برای هر سه عضو دلخواه a, b, c متعلق به A از aRb و bRc نتیجه شود aRc در اینصورت گوییم R متعدی است.

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R, (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

سوال. آیا رابطه عاد کردن خاصیت تعدی دارد؟ جواب. بله اگر a عاد کند b را انگاه عددی مانند k وجود دارد بطوریکه $b = ak$ و اگر b عاد کند c را انگاه عددی مانند m وجود دارد که $c = bm = akm$ بعبارت دیگر a عاد میکند c را

رابطه هم ارزی = رابطه ای دارای خاصیت هم ارزی است که دارای سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تعدی باشد

مثال: خواص رابط $R = \{(a, b) | a \geq b\}$ را روی مجموعه اعداد صحیح بررسی کنید

حل: میدانیم هر عدد بزرگتر یا مساوی خودش است یعنی $a \geq a$ پس $(a, a) \in R$ یعنی R بازتابی است

R ضد تقارن است زیرا اگر $a \geq b$ و $b \geq a$ انگاه $a = b$ خواهد بود پس R هم ارزی نیست زیرا شرط تقارنی برقرار نیست

R متعدی است زیرا اگر $a \geq b$ و $b \geq c$ انگاه $a \geq c$

مثال: فرض کنید رابط R در مجموعه تمام کلمات فارسی چنین تعریف شده باشد که aRb اگر و تنها اگر تعداد حروف a با یکدیگر برابر باشند آیا R هم ارزی است؟

حل: فرض کنید $L(a)$ تعداد حروف a و $L(b)$ تعداد حروف b در کلمه مورد نظر باشد پس رابط R به این ترتیب است که:

$$aRb \leftrightarrow L(a) = L(b)$$

۱: از آنجائیکه $L(a) = L(a)$ در نتیجه aRa یعنی خاصیت بازتابی دارد ۲: اگر aRb یعنی $L(a) = L(b)$ پس $L(b) = L(a)$ و این یعنی bRa پس R خاصیت تقارنی دارد ۳: اگر aRb یعنی $L(a) = L(b)$ و اگر bRc یعنی $L(b) = L(c)$ پس $L(a) = L(c)$ در نتیجه aRc یعنی R متعدی است چون هر سه شرط هم ارزی برقرار است نتیجه میگیریم R هم ارزی است

تمرین: رابط R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ بصورت $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 2)\}$

تعریف شده است آیا R هم ارزی است؟

رابطه ترتیب (تعریف): رابط R روی مجموعه A یک رابط ترتیب است هرگاه بازتابی ضد تقارنی و متعدی باشد

مثال: در مجموعه $A = \{a, b, c\}$ رابط $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c)\}$ تعریف شده است آیا R یک رابط ترتیب است؟

حل: انعکاسی (بازتابی) است زیرا هر عضو A با خودش در رابط است. ضد تقارن است زیرا در این ترکیب شرطی $(b, c) \in R$ و $(c, b) \in R \rightarrow b = c$ مقدم این ترکیب شرطی نادرست است پس شرط فوق به انتفای مقدم درست است. رابط متعدی است (استدلالی مشابه ضد تقارن دارد) در نتیجه رابط ترتیب است.

خواص اعداد صحیح:

یکی از چهار عمل اصلی روی اعداد صحیح عمل تقسیم است میدانیم حاصل تقسیم دو عدد صحیح لزوماً عدد صحیح نیست مانند تقسیم عدد ۲۷ بر

۶ ولی عدد ۱۸ بر ۶ بخش پذیر است در این حالت میگوییم عدد ۶ عدد ۱۸ را می شمارد یا ۱۸ یک مضرب ۶ است

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه ای که $a = bq$ در این صورت می نویسیم $b|a$ و چنین می خوانیم: a بر b بخش پذیر است و یا b یک شمارنده یا مقسوم علیه a است و هرگاه a بر b بخش پذیر نباشد می نویسیم $b \nmid a$. در حالت $b = 0$ چون به ازای هر $q \in \mathbb{Z}$ داریم $0 = 0 \times q$ میتوان تعریف بخش پذیری را گسترش داد و عبارت صفر بر صفر بخش پذیر است را پذیرفت.

مثال : خواص رابطه بخش پذیری را بررسی کنید

۱- این رابطه بازتابی است زیرا $a \equiv a$ پس $a|a$

۲- این رابطه متقارن نیست زیرا میدانیم عدد ۸ بر ۲ بخشپذیر است ولی ۲ بر ۸ بخشپذیر نیست

۳- این رابطه متعدی است یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ را آنگاه $a|c$

دلیل: اگر $a|b$ آنگاه عدد q وجود دارد که $b=aq$ و اگر $b|c$ آنگاه q' وجود دارد که $c=bq'$ در نتیجه $c=a(qq')$ یعنی $a|c$

۴- این رابطه ضد تقارن نیست مثلاً $9|-9$ و $-9|9$ ولی $9 \neq -9$

ویژگی های بخش پذیری اعداد: فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند که $a|b$ آنگاه

الف: $a|b$ ب: $a|-b$ ت: $-a|-b$ ج: به ازای هر عدد صحیح m داریم $a|bm$ د: اگر $b \neq 0$ و آنگاه $|a| \leq |b|$

ویژگی های دیگر: فرض کنید a, b, c سه عدد صحیح باشند

الف: اگر $a|1$ آنگاه $a = \pm 1$ (یعنی تنها مقسوم علیه های عدد ۱ اعداد ۱ و -۱ هستند ب: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$

اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه به ازای اعداد صحیح m و n داریم $a|mb+nc$

همنهشتی: فرض کنید m یک عدد طبیعی باشد. دو عدد صحیح a, b را به پیمانه m همنهشت گویند هر گاه $a-b$ مضرب m باشد. یعنی $a-b$ بر m

بخش پذیر باشد. همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانه m را به صورت های زیر نمایش میدهند. (پیمانه m) $a \equiv b$ و یا

$a \equiv b \pmod{m}$ و میخوانند " a همنهشت b است به پیمانه m "

مثال: (پیمانه ۶) $16 \equiv 34$ زیرا $34-16=18$ بر ۶ بخش پذیر است ولی (پیمانه ۶) $5 \not\equiv 8$ زیرا $8-5=3$ بر ۶ بخشپذیر نیست

توجه کنید که نقیض (پیمانه m) $a \equiv b$ را چنین مینویسیم: (پیمانه m) $a \not\equiv b$

مثال: همنهشتی یک رابطه هم ارزی روی مجموعه اعداد صحیح است

اثبات: بازتابی است (پیمانه m) $a \equiv a$ زیرا $a-a=0$ یعنی a بر a بخشپذیر است

متقارن است زیرا اگر (پیمانه m) $a \equiv b$ باشد آنگاه $a-b$ مضربی از m است یعنی عددی مانند k وجود دارد که $a-b=mk$ میتوان نوشت $b-a=m(-k)$

طبق تعریف همنهشتی میتوان نوشت (پیمانه m) $b \equiv a$

متعدی است زیرا اگر (پیمانه m) $a \equiv b$ داریم $a-b=mk$ (۱) و اگر (پیمانه m) $b \equiv c$ آنگاه $b-c=k'$ (۲) از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه میشود

$a-c=m(k+k')$ پس (پیمانه m) $a \equiv c$

توجه: مجموعه تمام دسته های همنهشتی به پیمانه m را با Z_m یا $\frac{Z}{m}$ و مجموعه تمام اعداد صحیحی که با a همنهشت هستند را با $[a]$

یا $\bar{a}$ نمایش میدهند. $[a]$ را دسته هم ارزی و a را نماینده این دسته گویند. اگر b عضو دیگری از دسته هم ارزی $[a]$ باشد داریم $[a] = [b]$. بطور

کلی $[a] = [b]$ اگر و تنها اگر (پیمانه m) $a \equiv b$

اعدادی که با b به پیمانه m همنهشت هستند با افزودن مضربی از m به b دست میآید. $[b] = \{b+mk, k \in Z\}$

مثال: مجموعه تمام اعداد صحیح که به پیمانه ۵ با ۳ همنهشت اند $\{ \dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \}$ $[3] = \{3 + 5k, k \in Z\}$

۱- اگر $a \equiv b (m)$ باشد آنگاه برای هر عدد صحیح c ، $a+c \equiv b+c (m)$ (پیمانه c)

۲- اگر $a \equiv b (m)$ و $c \equiv d (m)$ آنگاه $a+c \equiv b+d (m)$ (پیمانه m) و $ac \equiv bd (m)$ (پیمانه m)

۳- هرگاه $a_1 \equiv b_1 (m)$ و $a_2 \equiv b_2 (m)$ و $\dots$ و $a_r \equiv b_r (m)$ باشند آنگاه $a_1 a_2 \dots a_r \equiv b_1 b_2 \dots b_r (m)$ (پیمانه m)

۴- هرگاه $a \equiv b (m)$ آنگاه برای هر $n \gg 1$ داریم $a^n \equiv b^n (m)$ (پیمانه m)

مثال: مطلوبست باقیمانده تقسیم 2^{30} بر ۱۷. حل: میدانیم $16 \equiv -1 (17)$ پس $16 \equiv -1 (17)$ پس $2^4 \equiv -1 (17)$

طبق خاصیت ۴ بالا میتوان گفت: (پیمانه ۱۷) $(-1)^7 \equiv (-1)^7 (17)$ از طرفی دیگر (پیمانه ۱۷) $2^4 \equiv -1 (17)$ و در نتیجه

(پیمانه ۱۷) $2^{28} \equiv (-1)^7 \equiv -1 (17)$ اما $2^{30} = 2^{28} \times 2^2 \equiv (-1) \times 4 \equiv -4 \equiv 13 (17)$ در نتیجه باقیمانده تقسیم 2^{30} بر ۱۷ عدد ۱۳ است

تقسیم طرفین همنهشتی بر عددی صحیح مانند c

در حالت کلی موضوع بالا برقرار نیست ولی در رابطه همنهشتی $a \equiv b (m)$ میتوان گفت (پیمانه $\frac{m}{d}$) $a \equiv b (\frac{m}{d})$ که $d = (m, c)$

(d بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و c است) به مثال های زیر توجه فرمایید

میدانیم (پیمانه ۶) $21 \equiv 33 (6)$ اگر طرفین را بر ۳ تقسیم کنیم رابطه نادرست (پیمانه ۶) $7 \equiv 11 (6)$ حاصل میشود زیرا $6-11$ مضرب ۷ نیست ولی از

(پیمانه ۶) $2 \equiv 8 (6)$ نتیجه میشود (پیمانه ۳) $1 \equiv 4 (3)$

معادلات دیوفانتی (معادلات سیاله): معادله $ax+by=c$ را که در آن a, b, c اعداد صحیح میباشند معادله سیاله گویند. اگر عددهای صحیح

x, y یافت شوند که $ax+by=c$ گوئیم معادله جواب دارد.

قضیه: معادله سیاله $ax+by=c$ در مجموعه Z جواب دارد اگر و تنها اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b عدد c را بشمارد

نکته: اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک a, b برابر d و x, y یک جواب برای معادله خطی $ax+by=c$ باشد آنگاه تمام جواب های معادله به

صورت $x = x_0 + k \frac{b}{d}$ ، $y = y_0 - k \frac{a}{d}$ است که در آن $k \in Z$

مثال: شخصی میخواهد با بن ۵۱۰۰ تومان کتاب بخرد. اگر بن های او فقط ۵۰۰ و ۲۰۰ تومانی باشد چند بن ۵۰۰ و چند بن ۲۰۰ تومانی باید بپردازد؟

حل: فرض کنید x تعداد بن های ۲۰۰ تومانی و y تعداد بن های ۵۰۰ تومانی باشد پس باید جواب های معادله $200x + 500y = 5100$ را پیدا کنیم که x

و y نامنفی هستند. طرفین معادله را بر ۱۰۰ تقسیم میکنیم داریم $2x + 5y = 51$ چون بزرگترین مقسوم علیه ۲ و ۵ برابر عدد ۱ میباشد و ۵۱ بر ۱

بخشپذیر است مینویسیم $x = \frac{51-5y}{2}$ چون $\frac{51-5y}{2}$ عددی صحیح است. عددی مثل m وجود دارد که $1-y=2m$ یا

(۱) $y=1-2m$ در نتیجه $x=25-2+4m+m=5m+23$ چون x, y اعداد نامنفی هستند پس $5m+23 \geq 0$ و $1-2m \geq 0$ پس $m \leq \frac{1}{2}$ و

$m \geq -\frac{23}{5}$ یعنی $-\frac{23}{5} \leq m \leq \frac{1}{2}$ تمام مقادیر صحیح m که در این فاصله هستند عبارتند از ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴. باقرار دادن این مقادیر در

روابط (۱) و (۲) تعداد بن های ۲۰۰ ریالی عبارتند از: ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳

و ۵۰۰ ریالی برابر است با ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹

تمرینات: برای هریک از معادلات زیر یا تمام جوابها را به دست آورید یا ثابت کنید جواب ندارد؟

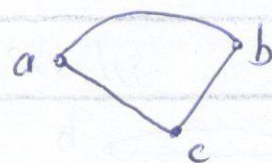
الف - $2x+3y=11$ ب - $17x+13y=100$ ج - $21x+14y=147$ د - $60x+18y=97$

تعریف: فرض کنید V یک مجموعه غیر تهی متناهی و E زیر مجموعه ای از مجموعه تمام زیر مجموعه های دو عضوی V باشد. در این صورت $G=(V, E)$ را گراف می نامیم. مجموعه V را مجموعه رئوس و E را مجموعه یال ها گویند. برای نمایش یال که از دو رأس a و b عبوری کند از نمایش $ab: \{a, b\}$ استفاده می شود.

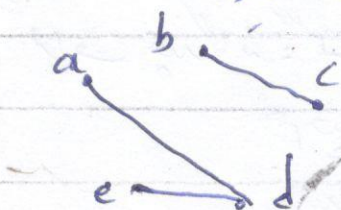
مثال: مجموعه رئوس و یال های گراف G را که در زیر نشان داده شده، مشخص کنید.

$$V = \{a, b, c\}$$

$$E = \{ab, ac, bc\}$$

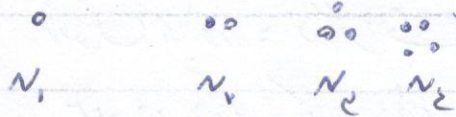


مثال: اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, e\}\}$ آنگاه بنابر تعریف $G=(V, E)$ را با رسم رئوس و یال های آن به صورت زیر است.



گراف تهی: گراف بدون یال، را تهی گویند. گراف تهی را با $\emptyset$ نشان داده می شود.

گراف همبندی از مرتبه n را K_n می گویند. K_1, K_2, K_3, K_4 به صورت زیر است.



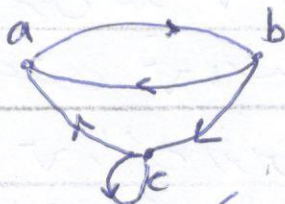
طریقه: n یالی که تنها یک رأس داشته باشد را K_n می نامند.

گراف جهت دار: فرض کنید V یک مجموعه متناهی غیر تهی و $E \subseteq V \times V$ باشد. در این صورت $D=(V, E)$ را گراف جهت دار می نامیم. در گراف جهت دار برای رئوس a و b ، دو یال (a, b) و (b, a) در صورت وجود متمایز از یکدیگر می گویند. (مثال: مجموعه رئوس و یال های گراف D در زیر نشان داده شده است. گراف را

رسم کنید

حل:

$$V = \{a, b, c\} \quad E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, c)\}$$



یال‌های دارای جهت را بین دو رأس یک گراف، به‌شکل یک یال برقرار باشد. آن یال‌ها را یال‌های دارای جهت گویند. در گراف جهت‌دار یال‌های بین دو رأس را دارای تانده‌گاه یا هم‌جهت می‌گویند.

مثال: در گراف‌های زیر، بین دو رأس a و b یال‌های دارای جهت را در نظر بگیرید.



گراف ساده: گراف فاقد یال‌های دارای جهت و حلقه را گراف ساده می‌نامند. گراف ساده جهت‌دار، به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

گراف چندگانه: گرافی که شامل یال‌های دارای جهت، گراف چندگانه گویند. هم‌چنین گراف جهت‌دار شامل یال‌های دارای جهت، گراف چندگانه جهت‌دار نامیده می‌شود.

گراف مختلط: گرافی که شامل یال‌های جهت‌دار و غیرجهت‌دار را با هم شامل می‌نماید.

رأس مجاور: در گراف $G = (V, E)$ دو رأس v و w را مجاور گویند هرگاه v و w توسط یک یال در G باشند.

مرتبه و اندازه گراف: تعداد رأس یک گراف، مرتبه گراف و تعداد یال‌ها را

اندازه گراف نامیده می‌شود. مرتبه گراف با n و $|V| = n$ و

اندازه گراف با m ، $|E| = m$ نشان داده می‌شود.

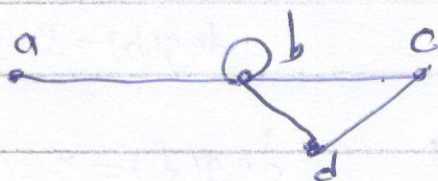
$$\text{قضیه:} \quad 0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

درجه رأس در گراف: تعداد یال‌های متصل به رأس. به علاوه، درجه آن رأس گفته می‌شود.

$\deg(u_i)$ نمایش می‌دهد

درجه: درجه رأسی که دارای یال‌های طرّف باشد است. مستطاد است در یال طرّف ۲ واحد در درجه رأس می‌باشد.

مثال: در گراف شکل درجه رأس را مشخص کنید.



$$\deg(a) = 1 \quad \deg(b) = 5 \quad \deg(c) = 2 = \deg(d)$$

درجه ورودی u_i : تعداد یال‌هایی که به رأس u_i وارد می‌شود. درجه ورودی u_i نامیده می‌شود و با $id(u_i)$ نشان داده می‌شود.

درجه خروجی u_i : تعداد یال‌هایی که از رأس u_i خارج می‌شود. درجه خروجی u_i نامیده می‌شود و با $od(u_i)$ نشان داده می‌شود.

$$\text{مجموع درجه } u_i: \deg(u_i) = id(u_i) + od(u_i)$$

و لذا مجموع درجه رأس گراف برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \deg(u_i) = \sum_{i=1}^n id(u_i) + \sum_{i=1}^n od(u_i)$$

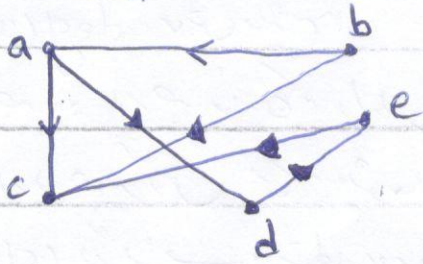
رأس متفرد: رأسی که درجه آن صفر باشد. رأس متفرد یا تنها نامیده می‌شود.

رأس معلق: رأسی که درجه آن یک باشد. رأس معلق یا آویزان می‌نامند. به همین ترتیب یالی که تنها یک رأس آن را دارد، رأس معلق نامیده می‌شود.

رأس فرد: رأسی است که درجه عددی آن فرد باشد.

رأس زوج: رأسی است که درجه عددی آن زوج باشد.

شکل: در گراف جهت دار نیز، درجه هر رأس، مرتبه و اندازه گراف را می‌سازد.



$$\begin{cases} od(a) = 2 \leftarrow \text{تعداد یال خروجی به } a \\ id(a) = 1 \leftarrow \text{تعداد یال ورودی به } a \end{cases} \quad \begin{cases} deg(a) = 3 \\ \text{درجه رأس } a \end{cases}$$

$$\begin{cases} od(b) = 2 \\ id(b) = 0 \end{cases} \quad deg(b) = 2$$

$$\begin{cases} od(c) = 0 \\ id(c) = 3 \end{cases} \quad deg(c) = 3 \quad \begin{cases} od(d) = 1 \\ id(d) = 1 \end{cases} \quad deg(d) = 2$$

$$od(e) = 1 \quad id(e) = 1 \quad deg(e) = 3$$

$$\sum_{i=1}^5 od(u_i) = 4 \quad \text{مجموع درجه خروجی} \quad \sum_{i=1}^5 id(u_i) = 4 \quad \text{مجموع درجه ورودی} \quad \sum_{i=1}^5 deg(u_i) = 12$$

مجموع درجه (درجه گراف) = ۱۲
 ل = مرتبه گراف = ۴ (تعداد یال)
 اندازه گراف = ۴ (تعداد رأس)

$$\sum_{i=1}^n deg(u_i) = 2|E| \quad \text{قضیه: در گراف } G = (V, E) \text{ داریم}$$

(مجموع درجه، در برابر تعداد یال است.)

نکته: درجه هر رأس گراف، امتداد یال نداشته باشد، مهم نیست.

نکته: تعداد رأس‌ها با درجه فرد، زوج است.

نکته: در گراف جهت دار، مجموع درجه خروجی رأس و مجموع درجه ورودی رأس، همان تعداد یال گراف است.

رأس ماکنیم: هر رأسی درجه درین گراف را ماکنیم (درجه آن).

رأس می‌کنیم: هر رأسی درجه درین گراف را می‌کنیم (درجه آن).

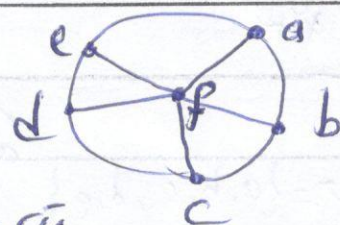
شکل: در گراف جهت دار نیز، رأس فرد، رأس زوج و رأس می‌کنیم (درجه آن).

۵۲

$$\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = \deg(e) = 3$$

$$\deg(f) = 5$$

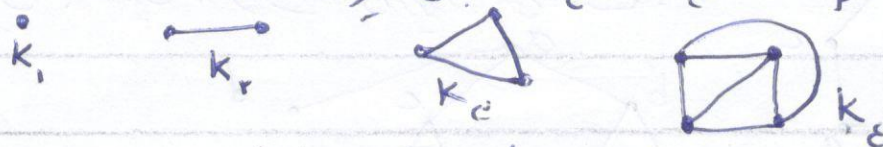
تمام رئوس از درجه فرد هستند پس $\Delta G = 5$ (بزرگترین درجه)



$$\delta(G) = 3$$

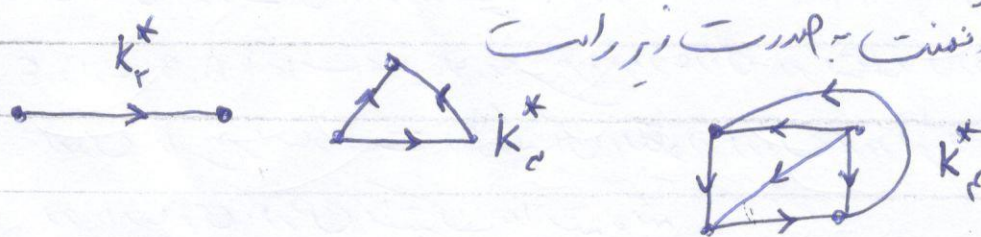
دنباله درجه گرراف: دنباله نزولی از درجه رئوس گرراف را، دنباله درجه گرراف گویند
مثال: در ترمین قبل دنباله درجه عبارت است از: ۵, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳

گرراف کامل: گرراف ساده G را کامل می‌نامند هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد به عبارتی، هر رأس گرراف کامل با $(n-1)$ رأس دیگر مجاور است. گرراف کامل n رئوس را با K_n نمایش می‌دهند
گرراف های کامل K_1, K_2, K_3, K_4 و K_5 شکل زیر هستند

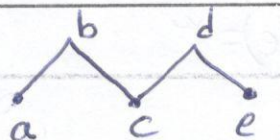


طبق تعریف گرراف کامل، درجه هر رأس در گرراف کامل $(n-1)$ است. (تعداد یال)
بنابراین: $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ (تعداد کل یال) یعنی اندازه گرراف

تورنمنت: گرانی است جهت دار، که بین هر دو رأس متمایز u و v در آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. تورنمنت n رئوس را با K_n^* نشان می‌دهند



گرراف دو بخشی: گرانی که بتوان آن را به دو زیر مجموعه V_1 و V_2 چنان افراز نمود که هر یال آن دارای یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 باشد و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و $V_1 \cup V_2 = V$
دو بخشی باشد. عبارت دیگر: $uv \in E \rightarrow u \in V_1, v \in V_2$ و $v \in V_1, u \in V_2$

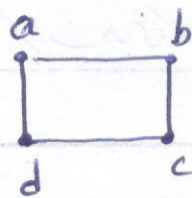
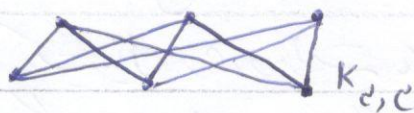


مثال: گراف زیر یک گراف (دو بخشی) است.

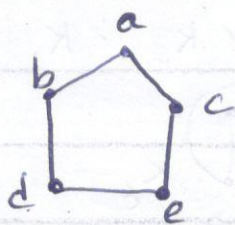
$$V = \{a, b, c, d, e\} \quad V_1 = \{a, c, e\}, \quad V_2 = \{b, d\}$$

گراف (دو بخشی) کامل: گراف دو بخشی G با مجموعه رئوس V_1 و V_2 را کامل گویند هرگاه هر رأس بخش V_1 با هر رأس بخش V_2 مجاور باشد. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد گراف (دو بخشی) کامل فوق با $K_{m,n}$ نشان داده میشود.

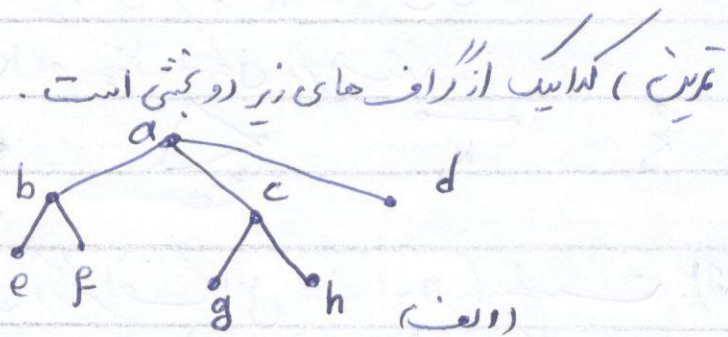
مثال: شکل زیر دو گراف (دو بخشی) کامل $K_{3,3}$ و $K_{2,2}$ را نشان میدهد.



(ج)



(ب)



(الف)

حل: گراف (الف) (دو بخشی) است با $V_1 = \{a, e, f, g, h\}$ و $V_2 = \{b, c, d\}$.

گراف (ب) (دو بخشی نیست) گراف (ج) (دو بخشی با مجموعه رئوس $V_1 = \{a, c\}$ و $V_2 = \{b, d\}$)

مثال: فرض کنید درسی در تعداد i استاد در C_i و $i=1, 2, 3, 4$ و استادی دروس

A, B, C, D, E انتخاب نماید به طوری که هر استاد در یک زیرمجموعه از این دروس باشد. هدف تعیین دروس را بر هر استاد است به طوری که آن استاد در دروس مورد نیاز در این دروس داشته باشد و هیچ دو استادی دروس مشترک نداشته باشند.

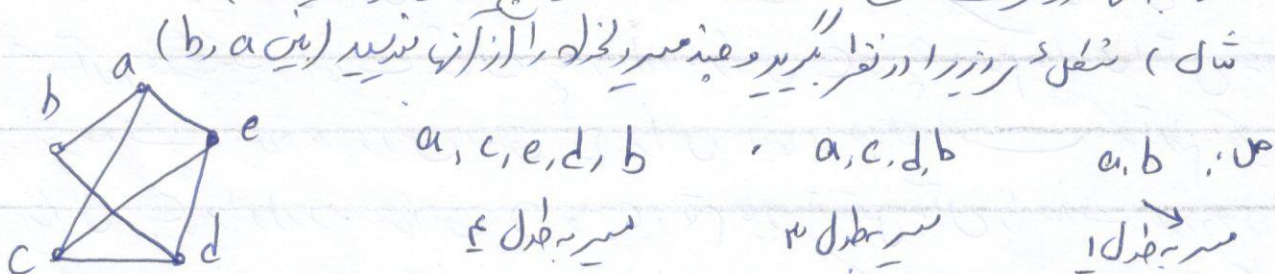
حل: ارتباط بین استاد و دروس را در جدول زیر نشان میدهیم.

دو بخشی با مجموعه رئوس $V_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$V_2 = \{A, B, C, D, E\}$ نشان داد

استاد	دروس
C_1	A, B
C_2	A, D
C_3	B, C, E
C_4	C, D, E

مسیر گراف و دور گراف: اگر u و v دو رأس متفاوت از گراف G باشند یک مسیر از u به v از گراف G دنباله (مستقل از $m+1$ ، $m \in \mathbb{N}$) رأس دو متفاوت می است که از u آغاز و به v ختم می شوند و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را طول این مسیر از گراف G می نامیم. می پذیریم که دنباله مستقل از یک رأس v یک مسیر با طول صفر از v به v از گراف G است. (نکته: شروع و ختم از یک رأس تکراری نیست)

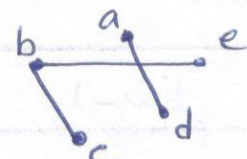


توجه کنید اگر از a به b مسیر وجود داشته باشد آنگاه از b به a نیز مسیر وجود دارد. لذا وجود و عدم وجود مسیر "بین" دو رأس گراف معنی دارد.

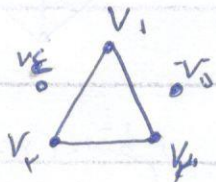
تعریف گراف همبند: هرگاه بین هر دو رأس گراف مسیری وجود داشته باشد آنرا همبند گویند. در غیر اینصورت گراف نا همبند است.

نکته: گراف طول بالا همبند است و گراف شکل زیر نا همبند است (چرا؟)

همچنین گراف K_p که $p \geq 2$ همبند نیست. البته K_1 همبند است.



و نکته دیگر گراف نا همبند



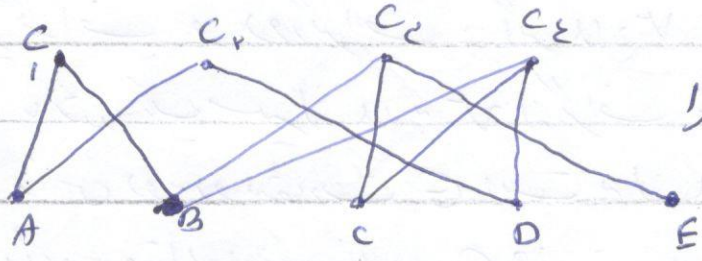
این گراف ۳ بخشی جدا از هم می باشد

$\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}$

و بین v_1 و v_5 مسیری وجود ندارد

تعریف دور گراف G : یک دور از گراف G دنباله ای چون $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1} = v_1$ باشد $m \geq 3$ متکثر از $m+1$ رأس G است که در آن v_i ها $1 < i < m$ دو به دو متمایز و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور باشند.

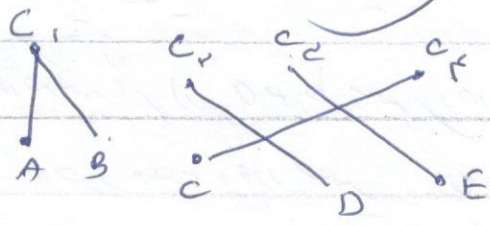
(مثال ها در صفحه بعد)



مانند به شکل دور و گاهی از انتخاب هارا
مقدار به صورت زیر تعیین کند

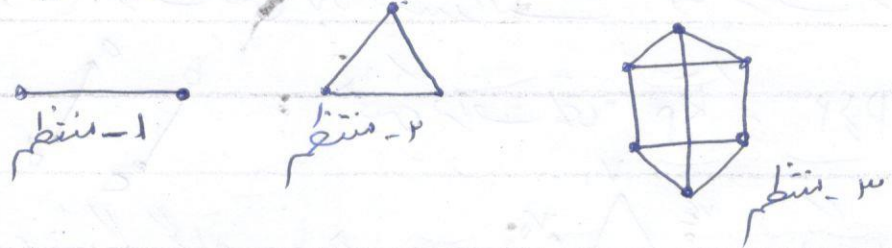
E رأس مقوق (رأس که درجه آن یک باشد) و شب است. رأس E و c1

تمام یا لا یکه متصل به آن را حذف کرده. رأس انتخابی بعدی رأس مقوق C در نظر بگیرد
که آنهم فقط یک انتخاب رأس c را دارد. رأس C و c1 و تمام یا لا ی که متصل به آن را
نیز حذف کرده. رأس مقوق D رأس انتخابی بعدی است. که آنهم یک انتخاب
رأس c2 را دارد. رأس D و c2 و تمام یا لا ی که متصل به آن را حذف کرده و در انت
رأس A و B تنها انتخاب c3 را دارند

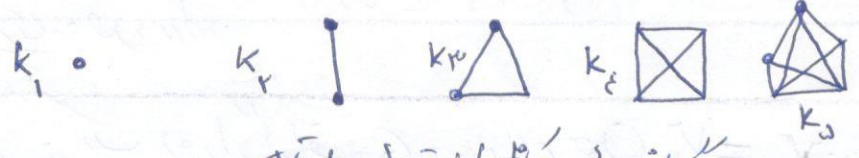


گراف r -منظم: اگر عدد صحیح r ($r \geq 0$) گراف ساده $G = (V, E)$ را
 r -منظم گویند هرگاه درجه هر رأس آن r باشد. عبارت $\forall u \in V, \deg(u) = r$

مانند شکل های زیر:



مثال: گراف K_n $(n-1)$ -منظم است (یادآوری: K_n گراف کامل n رأسی است)
که از هر رأس آن $(n-1)$ یال عبور می کند

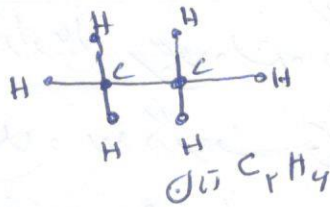
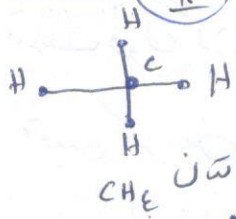


گراف K_n کامل از مرتبه n است

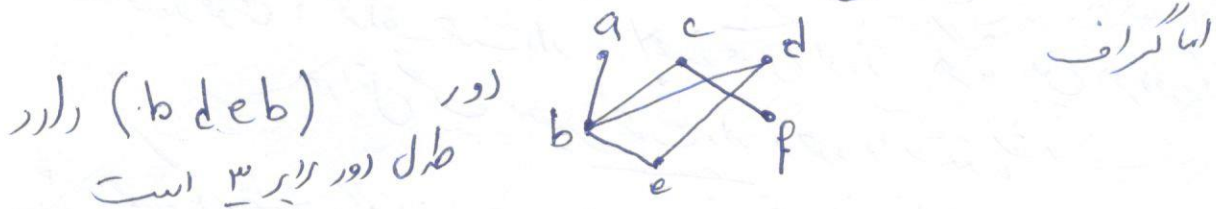
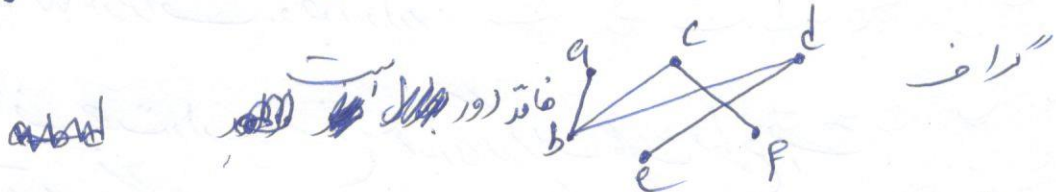
تعداد یال گراف کامل K_n برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است

تکرار دارد. گراف $(n-1)$ -منظم را K_{n-1} می نامند. هرگاه K_p مع یالی ندارد

یعنی $E(K_p) = \emptyset$ این گراف را گراف تهی می نامیم. به
 $K_0 = \emptyset$ / $K_1 = \{v\}$ / $K_2 = \{v, w\}$ / $K_3 = \{v, w, x\}$

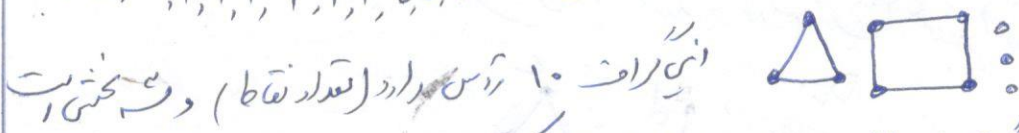


دو گراف هم سر در بر دور و دور ندارد

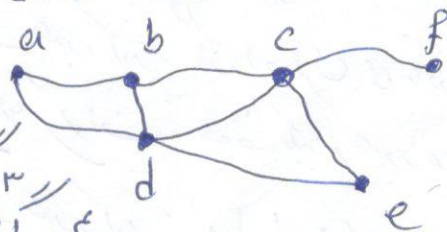


تمرین ۱ چرا گرافی وجود ندارد که درجه‌های رأس آن به ترتیب $5, 3, 3, 1, 0$ باشد
(جواب) چون گراف ۵ رأس دارد پس حداکثر یکی از این رأس آن می‌گذرد باید ۴ تا باشد در حالی که یک رأس را ۵ یال دارد.

تمرین ۲: گرافی ارائه دهید که درجه‌های رأس آن به ترتیب $5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 0, 0, 0$ باشد
حل:



آنها گراف دیگری با مشخصات فوق می‌توانند رسم کنند؟
توضیح: یک گراف ۱۱ رأس به ۷ رأس و ۷ یال است که از ۷ رأس و ۷ یال ختم می‌شود
تشریح کند: اگر هیچ‌کدام در گراف تکراری نباشد آن را گذرانند. اگر $u=7$ پس
رأس ابتدای آن به ۷ یال باشد آن را مدار یا گذرانند باشد
توضیح میسر: اگر هیچ رأس در گراف تکراری نباشد آنرا میسر گذارد $u=7$ آنرا دور یا مسیر بسته نامند
مثال: گراف در بالا نظر بگیرید. در این گراف



- ۱- گشت $b c d e c f$ گذراست
- ۲- گشت $b c d e c f$ سیر نیست زیرا رأس c تکراری است
- ۳- گشت $f c e d a$ گذراست
- ۴- گشت $a b d c e d a$ یک گذراست. مدار نیز می‌باشد
- ۵- گذر $a b d c e d a$ چون دارای رأس تکراری d است پس سیر نیست
- ۶- گشت $a b c d a$ یک سیر است و چون رأس a ابتدای آن است پس "دور" است

تشریح هر گشت: تعداد یالها موجوده شده در گشت از رأس u به رأس v ، حداقل آن گشت نام دارد
 قصبه: اگر بین دو رأس u و w در گراف G یک گشت وجود داشته باشد آنگاه یک مسیر
 از u به w در گراف وجود دارد.

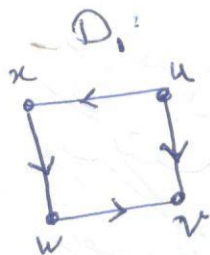
هم بندی در گراف جهت دار: سه نوع همبندی در گراف جهت دار است

۱- همبند قوی: گراف جهت دار را همبند قوی گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن حداقل یک مسیر جهت دار وجود داشته باشد

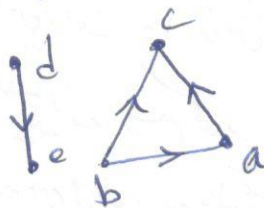
۲- همبند یک طرفه: گراف جهت دار را همبند یک طرفه گویند هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل از یک طرف مسیر وجود داشته باشد

۳- همبند ضعیف: گراف جهت دار را همبند ضعیف نامند هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت، بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری وجود داشته باشد یعنی با حذف جهت از گراف، زمینه آن همبند باشد

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر همبند و کدام یک نا همبند است



D_2 :



پاسخ: D_1 همبند یک طرفه

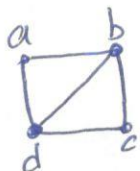
D_2 : نا همبند و دارای حلقه همبند است

گراف اویلری:

۱- گذر اویلری: گذری که از تمام یال‌های گراف عبور کند، گذر اویلری می نامند
 یعنی از هر گشتی که از تمام یال‌های گراف، فقط یکبار عبور نماید گذر اویلری است

۲- مدار اویلری: مداری که از تمام یال‌های گراف عبور کند، مدار اویلری نام دارد
 یعنی از هر مدار اویلری گشتی که از تمام یال‌های گراف فقط یکبار عبور کرده و به نقطه شروع بازگردد، گراف مدار اویلری، اگر اویلری نامیده می‌شود
 مثال در صفحه بعد ←

مثال: گراف شکل زیر، گذر اولیری $bc d b a d$ دارد و مدار اولیری ندارد



① قضیه: گراف همبند (چندگانه) G دارای مدار اولیری است اگر و تنها اگر

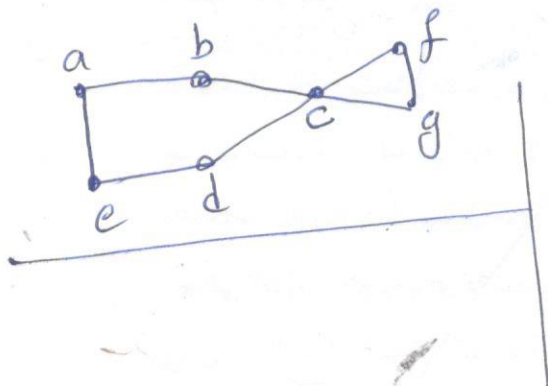
G همبند بوده و درجه تمام رئوس آن زوج باشد

② قضیه: گراف همبند (چندگانه) G دارای گذر اولیری است اگر و تنها اگر "واقعاً" دارای دو رأس از درجه فرد باشد

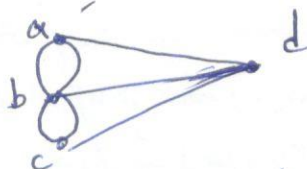
③ قضیه: گذر اولیری از یک رأس شروع به رأس فرد دیگری ختم می‌شود

④ قضیه: اگر $K_{m,n}$ - برای n, m زوج، اولیری است.

مثال: گراف زیر مدار اولیری دارد $abc f g c d e a b c$ ، $abc f g c d e a b c$ هفت مدارهای اولیری آن هستند



توجه: گذر و مدار اولیری گراف شکل زیر را در هر دو صورت وجود ندارد



$$\deg(a) = \deg(c) = \deg(d) = 2 \quad \deg(b) = 3$$

طبق قضیه ① هفت گراف فوق مدار اولیری ندارد.

گراف ۴ رأس از درجه فرد دارد و بنا بر قضیه ② گذر اولیری نیز ندارد.

قضیه: گراف (چندگانه) D دارای مدار اولیری است اگر و تنها اگر D همبند و درجه ورودی هر رأس با درجه خروجی آن برابر باشد یعنی

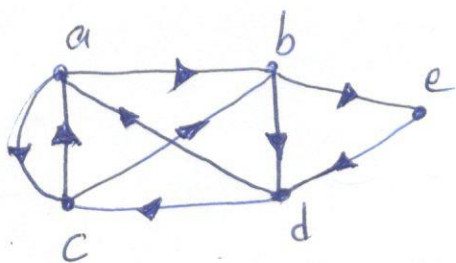
$$\forall u_i \in V \quad od(u_i) = id(u_i)$$

قضیه: گراف (چندگانه) D دارای گذر اولیری است اگر و تنها اگر D همبند و درجه ورودی و درجه خروجی هر رأس برابر باشند و برای دو رأس u, v داشته باشیم:

$$id(v_i) = od(v_i) + 1$$

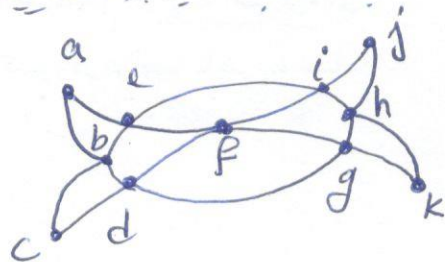
$$od(v_i) = id(v_i) + 1$$

در این صورت، گذر اولیری از رأس u شروع و به رأس v ختم می‌شود



شکل) مدار اولیه گراف شکل زیر را مشخص کنید
جواب: $abedc acbda$

شکل) برای گراف زیر بررسی کنید، آیا گره و مدار اولیه وجود دارد یا خیر



جواب: طبق قضیه ۱۱ صفحه ۱۱ چنین درجه ای در رأس آن درج است
پس دارای مدار اولیه است مثلاً
 $abedghijhk g f d c b e f e a$

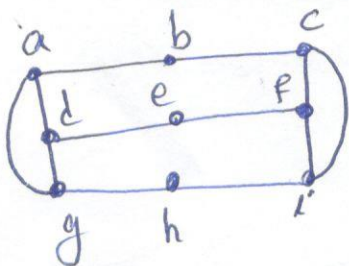
گراف گذر ندارد زیرا دقیقاً در رأس با درجه فرد مدار (فقط)
"گراف همیلتون"

"مسیر همیلطونی": مسیری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید، مسیر همیلطونی نام دارد.

"دور همیلطونی": دوری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند، به عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور کند و به رأس شروع بازگردد. دور همیلطونی نامیده می‌شود. به گرافانی که دور همیلطونی دارند گراف همیلطونی گفته می‌شود.

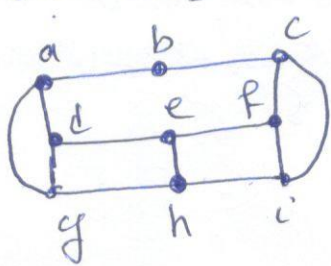
قضیه: اگر گراف G دارای دور همیلطونی باشد، آنگاه G دارای مسیر همیلطونی است.

شکل) در گراف های زیر مسیر و دور همیلطونی را درج نمایید.



G_1 :

$abcif e h g d a$ است



G_2 :

$abcif e d g h$ و همچنین دور همیلطونی

حل: گراف G_1 دور ندارد
وی دارای مسیر همیلطونی
است $abcif e d g h i$
گراف G_2 دارای مسیر همیلطونی

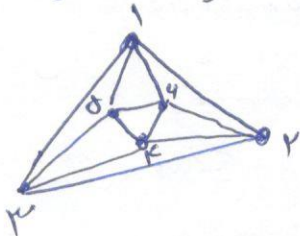
۱۴۵

نتایج: اگر گراف G همبندی باشد آنگاه

$$v \in V, \deg(v) \geq 2$$

(۵) اگر $\deg(v) = 2$ آنگاه $v \in E$ (و یا) مجزا متصل به v باید در دور همبندی قرار داشته باشد.

مثال: گراف هست و همی نزدیک گراف همبندی است در این گراف



دور ۱۲۳۴۵۶۱ یک دور همبندی است

تعریف رابطه بازگشتی: یک رابطه بازگشتی از مرتبه k برای دنباله a_n فرمولی است که همه n ام آن را بر حسب k جمله پیشین دنباله یعنی $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$ (که k عددی صحیح و $n \geq k$)

شرایط نمری: به مقادیر اولیه معلوم $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ از دنباله a_n شرایط نمری گفته می‌شود.

مثال: به رابطه $f(x) = \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_0 = 5 \end{cases}$ یک رابطه بازگشتی گفته می‌شود. بر حسب همه ماقبل خود دنباله

نوعه: متوالی از شیوه بازگشتی برای تعریف دنباله، توابع و مجموعه‌ها استفاده می‌شود. به این ترتیب که گاهی در یک دنباله برای همه مقادیر یک جمله لازم است مقادیر برخی جمله‌ها

نظر a_{n-1} و a_{n-2} مشخص باشد. به نظر مثال رابطه بازگشتی زیر را بنویسید:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad n \geq 1$$

این رابطه‌ها می‌کنند که برای همه مقادیر هر جمله کافی است به شرط برابر همه قبل آن پنج واحد افزوده شود بعد از آن مثال

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3(3) + 5 = 14$$

$$a_3 = 3(14) + 5 = 47, \quad a_4 = 3(47) + 5 = 146, \dots$$

مثال: دنباله زیر به دنباله فیبوناچی معروف است

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases} \quad \text{به همه مقادیر} \quad a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \text{ را باید}$$

$$\text{حل: } a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

حل روابط بازگشتی:

رابطه بازگشتی با ضرایب ثابت از مرتبه k اگر $k > 0$ و $c_{n-k} \neq 0, \dots, c_{n-1} \neq 0, c_n \neq 0$

اعداد حقیقی باشند آنگاه $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n)$ یک رابطه بازگشتی

با ضرایب ثابت از مرتبه k است.

رابطه بازگشتی همگن: اگر در رابطه قبل برای هر $n \geq 0$ $f(n) = 0$ باشد آنگاه رابطه بازگشتی را همگن گویند. در صورتیکه مقدار $f(n)$ غیر صفر باشد رابطه بازگشتی را ناهمگن نامند.

مقدار اول رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ یک رابطه بازگشتی ناهمگن است از مرتبه یک.

حل رابطه بازگشتی: منظور از حل یک رابطه بازگشتی، یافتن دنباله ای یا جمله عمومی از اعداد حقیقی است که در معادله $f(n) = a_n c_n + a_{n-1} c_{n-1} + \dots + c_0 a_{n-k}$ صدق کند.

بعبارت دیگر اگر $f(n)$ چنان باشد که به ازای $a_n = f(n)$ ، $n=0, 1, 2, \dots$ در رابطه بازگشتی $(*)$ صدق کند آنگاه $g(n)$ یک جواب رابطه بازگشتی است. به $g(n)$ جمله عمومی یا فرمول صریح رابطه بازگشتی گویند.

حل رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول با روش تکرار:

یک رابطه بازگشتی مرتبه اول به صورت $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} = 0$ ($C_n \neq 0, C_{n-1} \neq 0$) تعریف می‌شود. روش تکرار، تکنیکی است که می‌توان از آن در حل روابط بازگشتی همگن مرتبه اول باری جست. در این شیوه به کمک شرایط مرزی و رابطه بازگشتی چند جمله اول را بدست آورده و برای هر منطقه جمله عمومی را حدس می‌زنیم سپس به کمک استقرا ریاضی، جمله حدس زده شده را اثبات می‌کنیم.

مثال) جمله عمومی رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ a_0 = 3 \end{cases}$ را بیابید.

حل: رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول است که به چه جمله اول آن عبارتند از:

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 2a_0 = 2(3) = 6 \quad a_2 = 2a_1 = 2(6) = 12$$

$$a_3 = 2a_2 = 2(12) = 24 \quad a_4 = 2a_3 = 2(24) = 48$$

$$a_n = 3 \times 2^n \quad \forall n \geq 0$$

باقیه به صورت بدست آمده حدس می‌زنیم که $a_n = 3 \times 2^n$ است. حالا به کمک استقرا ریاضی حدس را اثبات می‌کنیم.

گام اول: $n=0$ مقدار است $a_0 = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$

گام دوم: فرض می‌کنیم رابطه برای $n=k$ برقرار است (فرض می‌کنیم برقرار است)

گام سوم: حکم ثابت می‌کنیم $a_{k+1} = 3 \times 2^{k+1}$ (در صفحه بعد)

$$۲ \times ۲^{k+1} = \underbrace{۲(۲^k)}_{a_k} (۲) = a_k \times ۲ = a_{k+1}$$

رابطه بازگشتی فوقی $a_n = ۳(۲^n)$ است.

حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دوم:

یک رابطه بازگشتی همگن با فریب ثابت از مرتبه دوم بصورت زیر است:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

یک تکنیک اساسی برای حل رابطه‌ی بازگشتی همگن آنست که به دنبال یافتن جواب

به صورت $a_n = r^n$ (که $r \neq 0$) باشیم اگر $a_n = r^n$ را در رابطه بالا قرار دهیم متبادی

$$C_n r^n + C_{n-1} r^{n-1} + C_{n-2} r^{n-2} = 0$$

معادله شکل ساده درجه دوم $C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$ حاصل می‌شود که آنرا معادله مشخصه

می‌نامند. لذا دنباله $a_n = r^n$ جواب رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم است اگر و تنها اگر

r جواب معادله معادله مشخصه آفر باشد. پس گاهی است که r معادله مشخصه را می‌توانیم

الف) r_1, r_2 دو عدد حقیقی متمایز
ب) r_1, r_2 دو عدد مختلط مزدوج اند

حالت الف) اگر r_1, r_2 دو عدد حقیقی متمایز باشند در این حالت جواب عمومی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ که در آن C_1, C_2 ثابت‌های دلخواهی هستند و در هر صورت مشخص بودن

تقسیم: راه حل ارائه شده را ساده‌تر می‌کنیم. هر رابطه بازگشتی از مرتبه k را با تکنیک ساده مشخصه و دست آوردن

مثال در صفحه بعد ←

فصل ۱ رابطه بازگشتی مرتبه اول ممکن
اصل کلیه، $\begin{cases} a_n = r a_{n-1} & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

$$a_n = r^n \rightarrow r^n = r r^{n-1} \rightarrow r^n - r r^{n-1} = 0 \quad r^{n-1}(r-r) = 0 \rightarrow r-r=0$$

$$(r=r) \rightarrow a_n = C(r)^n \xrightarrow{a_0=1} 1 = C(r)^0 \rightarrow C=1 \Rightarrow a_n = r^n$$

فصل ۲ رابطه بازگشتی (رابطه ضریب ثابت)
اصل کلیه، $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

$$a_n = r^n \rightarrow r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \rightarrow r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0 \quad r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0 \quad \text{معادله درجه دوم} \rightarrow \Delta = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5} \rightarrow r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

برای یافتن C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم

$$a_0 = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2$$

$$a_1 = 1 \rightarrow 1 = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \rightarrow 1 = C_1 (1-\sqrt{5}) - C_1 (1+\sqrt{5}) \rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad n \geq 0$$

اصل کلیه، $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 11a_{n-2} + 4a_{n-3} \\ a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = 1 \end{cases}$

فصل ۳ رابطه بازگشتی

$$a_n = r^n \Rightarrow r^n = 4r^{n-1} - 11r^{n-2} + 4r^{n-3} \Rightarrow r^{n-3}(r^3 - 4r^2 + 11r - 4) = 0$$

$$r^3 - 4r^2 + 11r - 4 = 0 \quad \text{معادله درجه سوم} \xrightarrow{\text{حل در } r=1} r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = C_1(1)^n + C_2(2)^n + C_3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 = C_1 + C_2 + C_3 \\ a_1 = 0 = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}C_3 \\ a_2 = 1 = C_1 + 4C_2 + \frac{1}{4}C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = 1 - (2)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

پایان

مثال

حالت ب) معادله مشخصه را از رابطه ضاعف $r_1 = r_2 = r$ می‌باشد در این حالت جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ است.

در حالت کلی اگر $(n \geq k)$ $c_{n-k} a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$ $c_{n-1} \neq 0, c_n \neq 0$

$c_{n-k} \neq 0$ اعداد حقیقی و r ریشه تکراری m مرتبه m ($2 \leq m \leq k$) باشد آنگاه
جواب عمومی به صورت

$$\hookrightarrow (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

که در آن $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ ثابت‌های دلخواه می‌باشد.

مثال) جواب رابطه بازگشتی
$$\begin{cases} 4a_{n+2} + 4a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = r^n \rightarrow 4r^{n+2} + 4r^{n+1} + r^n = 0 \Rightarrow r^n (4r^2 + 4r + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \quad \text{معادله مشخصه، جواب آن} \quad r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{ریشه مضاعف})$$

$$a_n = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot n$$

$$a_0 = 1 = c_1, \quad a_1 = 1 = -\frac{1}{2} + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow c_2 = -3 \Rightarrow a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثال) رابطه بازگشتی
$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1 \end{cases}$$

$$a_n = r^n \rightarrow r^n + 2r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} = 0 \Rightarrow r^{n-3} (r^3 + 2r^2 + r + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0 \quad \text{معادله مشخصه} \quad (r+1)^2 = 0 \quad r+1=0 \quad \boxed{r=-1}$$

$$a_n = c_1 (-1)^n + c_2 (-1)^n \cdot n + c_3 (-1)^n \cdot n^2 = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) (-1)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = c_1 \\ a_1 = -2 = -c_1 - c_2 - c_3 \xrightarrow{c_1=1} c_2 + c_3 = 1 \\ a_2 = -1 = c_1 + 2c_2 + 4c_3 \xrightarrow{c_1=1} 2c_2 + 4c_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_2 = 3, c_3 = -2}$$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2) (-1)^n \quad \text{جواب}$$

حالت ج) سارم ششم دارای دوره پوی r_1, r_2 باشد در این حالت جواب عمومی رابطه بازگشتی عبارت از $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ که در آن C_1, C_2 دو عدد ثابت هستند.

وقت شود برای بدست آوردن جواب a_n از غایش ششای اعداد پوی استفاده می کنیم

مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases} \quad n \geq 2$$

حل: قرار دهیم $a_n = r^n$

$$r^n = 2r^{n-1} - 2r^{n-2} \Rightarrow r^2(r - 2r + 2) = 0$$

سارم ششم: $r^2 - 2r + 2 = 0$ است که ریشه های آن عبارت از:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}(-1)}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1+i = r_1 \\ 1-i = r_2 \end{cases}$$

$$a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$$

اما غایش ششای:

$$1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$1-i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}) \quad (1-i)^n = \sqrt{2}^n (\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$a_n = C_1 \sqrt{2}^n (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}) + C_2 \sqrt{2}^n (\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4})$$

$$a_n = \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4} (C_1 + C_2) + i \sqrt{2}^n (C_1 - C_2) \sin \frac{n\pi}{4}$$

با اعمال شرایط مرزی تعیین می شود $C_2 = 0, C_1 = 1$

$$a_n = \sqrt{2}^n (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$$

حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت: بدین صورت کلی رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$\textcircled{1} C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad n \geq k$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفرند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر حسب تغییر n است.

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه درم ناهمگن: $f(n) = C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-r} a_{n-r}$

به صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ است که در آن

رابطه بازگشتی همگن $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \dots + C_{n-r} a_{n-r} = 0$ و

برای رابطه $\textcircled{1}$ است

✓ (۴۷)

جواب خصوصی یک معادله به چه $f(n)$ بستگی دارد. جدول زیر دسته بندی جواب خصوصی را
 با توجه به صورت معادله مختلف $f(n)$ ارائه شده. در این جدول $A, A_0, A_1, A_2, \dots, A_t$
 ثابت‌هایی هستند که با جایگذاری $a_n^{(p)}$ در رابطه ① به دست می‌آیند.

$a_n^{(p)}$	$f(n)$	
الف) اگر r ریشه ساده معادله باشد $a_n^{(p)} = Ar^n$ ب) اگر r ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s r^n$	$r \neq 0, r = f(n)$	۱
الف) اگر عدد یک ریشه ساده معادله باشد $a_n^{(p)} = A_0 + A_1 n + \dots + A_t n^t$ ب) اگر عدد یک ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s (A_0 + A_1 n + \dots + A_t n^t)$	$(t \in \mathbb{N}), r = f(n)$	۲
الف) اگر c ریشه ساده معادله باشد: $a_n^{(p)} = A$ ب) اگر c ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s A$	عدد ثابت $c = f(n)$	۳
الف) اگر r ریشه ساده معادله باشد $a_n^{(p)} = r^n (A_0 + A_1 n + \dots + A_t n^t)$ ب) اگر r ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s r^n (A_0 + A_1 n + \dots + A_t n^t)$	$f(n) = r^n$ $t \in \mathbb{N}, r \neq 0, r \in \mathbb{R}$	۴
الف) اگر $a \pm i$ ریشه ساده معادله باشد $a_n^{(p)} = (A \sin an + B \cos an)$ ب) اگر $a \pm i$ ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s (A \sin an + B \cos an)$	$f(n) = \cos an$ $f(n) = \sin an$ $a \neq k\pi$	۵
الف) اگر $ra \pm i$ ریشه ساده معادله باشد $a_n^{(p)} = r^n (A \sin an + B \cos an)$ ب) اگر $ra \pm i$ ریشه مکرر معادله باشد با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = n^s r^n (A \sin an + B \cos an)$	$f(n) = r^n \cos an$ $f(n) = r^n \sin an$ $a \neq k\pi$	۶

نکته: اگر $f(n)$ صورت حاصل جمع از توابع ارائه شده در جدول است، جدول پاره
 $a_n^{(p)}$ نیز می تواند حاصل جمع جدول متناظر در جدول است و جدول می باشد.

مثال: دنباله بازگشتی مسئله برج هانوی $n \geq 2$ $\{ a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1 \}$ را حل کنید.

رابطه $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $\Rightarrow a_{n+1} - 2a_n = 1$ ناگفته است ابتدا رابطه

بازگشتی همگن $a_{n+1} - a_n = 0$ را حل و سپس جواب خصوصی را بدست آوریم.

$f(n) = 1$ در رابطه همگن قرار می دهیم $a_n = r^n$ از آنجا

$$r^{n+1} - 2r^n = 0 \Rightarrow r(r-2) = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ یا } r = 0$$

$a_n^{(h)} = C(2^n)$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است. از آنجا که $f(n) = 1$

$C = 1$ در معادله مشخصه است. حالت ۳- الف جدول مشخصه

ستارگنت $a_n^{(p)} = A$ پس $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C(2^n) + A$

با رست آوردن جواب A در جواب رابطه بازگشتی ابتدا جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A$

را در رابطه بازگشتی قرار داده و به تادی می رسیم پس $A = 2A + 1$ در نتیجه $A = -1$

پس $a_n = C(2^n) - 1$ از طرفی $a_1 = 1$ پس $C = 1$ و طبق شرایط

مرزی، $C = 1$ و $a_1 = 1 = C(2^1) - 1 \Rightarrow C = 1$ پس $a_n = 2^n - 1$ ($n \geq 1$)

شده، جواب رابطه بازگشتی زیر را بدست آورده

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n \\ a_0 = 7, a_1 = 1 \end{cases} \quad n \geq 2$$

حل: سارم گهن $a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ را در نظر می گیریم $a_n = r^n$

$$r^n - 5r^{n-1} + 4r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 5r + 4) = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ یا } r = 4$$

بنابراین جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن، عبارت است از $a_n^{(h)} = C_1(2^n) + C_2(4^n)$ جواب خصوصی

$f(n) = 2^n$ است که $r = 2$ در معادله مشخصه می باشد در حالت ۱- ب جدول مشخصه

جواب خصوصی $a_n^{(p)} = An(2^n)$ قرار می دهیم در نتیجه $a_n = C_1(2^n) + C_2(4^n) + An(2^n)$

(۴۹)

برای یافتن A جواب خصوصی در رابطه بازگشتی اولیه قرار داده می شود

$$An^2 - 5A(n-1)^2 + 4A(n-2)^2 = 2^n$$

از عامل 2^{n-2} فاکتور گرفته می شود

$$2^{n-2} [2An - 5(A)(2n-1) + 4A(n-2)] = 2^{n-2} (2)$$

با حذف 2^{n-2} از طرفین و ساده کردن عبارت

$$2A - 5A(2n-1) + 4A(n-2) = 2 \rightarrow A = -2$$

بنابراین $a_n = c_1(2^n) + c_2(n)(2^n)$ از طرفی دیگر با توجه به شرایط مرزی می توان c_1, c_2 را به دست آورد

$$\begin{cases} a_0 = 1 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1/2, c_2 = 1/2$$

$$a_n = 1/2(2^n) + 1/2(n)(2^n) = 2^{n-1} + n2^{n-1}$$

شده) یک جواب خصوصی را بر رابطه بازگشتی $a_n = 2^n$ فرض می کنیم و در رابطه قرار می دهیم

$$2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot 2^n = 0$$

$$2^n(2^2 - 5 \cdot 2 + 4) = 0$$

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow 4 - 10 + 4 = 0 \Rightarrow -2 = 0$$

برای یافتن جواب خصوصی، دو عامل 2^n و $n2^n$ در رابطه بازگشتی اولیه قرار داده می شود. با توجه به عمل 2^n و از آنجا که $2=1$ ریشه ساده مشخص نیست. بنابراین حالت $2=2$ - اف جدول همگی 2 اولین جواب خصوصی عبارت از $a_n^{(p)} = A + A_1n + A_2n^2$ (از طرفی با توجه به عمل 2^n و اینکه $2=3$ ریشه ساده مشخص نیست) بنا به ۱- اف جدول همگی 2 روشی جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A(2^n)$ لذا برای یافتن ضرایب باید $a_n^{(p)}$ را در رابطه بازگشتی قرار داد.

$$(A + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2 + A(2^{n+2})) - (A + A_1n + A_2n^2 + A(2^{n+1})) = 2^{n+2}$$

$$2(A + A_1n + A_2n^2 + A(2^n)) = 2^{n+2} \Rightarrow -2A + A_1 + 2A_2 + (-2A_2 + 2A_1)n + (-2A_1)n + 2A(2^n) = 2^{n+2}$$

با مقایسه قرار دادن ضرایب جدول هم در هر طرف تساوی فراهم می آید

$$\begin{aligned} -2A + A_1 + 2A_2 &= 0 \rightarrow A_1 = -\frac{1}{2} \\ -2A_1 + 2A_2 &= 0 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{4} \\ -2A_2 &= 1 \rightarrow A = 1/4 \end{aligned}$$

$$a_n^{(p)} = -1 - \frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}(2^n)$$

مثال) فرض کنید شخصی مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ تومان در یک حساب سپرده‌گذاری می‌کند که بهره آن ۱۵٪ می‌باشد پس اندازه می‌کند. پس از مدت ۳ سال پس اندازه شخصی در این حساب چه مقدار خواهد بود
 حل: فرض a_n مبلغ باقیمانده در حساب پس از n سال باشد از آنجا که مبلغ باقیمانده در حساب بعد از n سال برابر است با مبلغ باقیمانده در حساب بعد از $(n-1)$ سال علاوه بر سود متعلق به آن در سال n م. فراهم راست

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 0.15a_{n-1} \\ a_0 = 100,000 \end{cases} \rightarrow a_n = (1.15)a_{n-1}$$

تکرار همین $a_n = r^n$ به $r = 1.15$ $r^{n-1} (r - 1.15) = 0 \leftarrow r = 1.15$
 پس $a_n = c(1.15)^n$ $a_0 = 100,000$ فراهم راست $c = 100,000$

پس از این $a_n = 100,000 (1.15)^n$ حال بی n عدد ۳ را قرار دهیم پس اندازه پس از ۳ سال
 $a_3 = 100,000 (1.15)^3$

مثال) رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 6 \end{cases}$ را حل کنید

حل: فرض $a_n = r^n$ و جایگذاری در رابطه بازگشتی داریم
 $r^n = 4r^{n-1} - 9r^{n-2} \rightarrow r^2 = 4r - 9 \rightarrow r^2 - 4r + 9 = 0$

و لذا $(r-3)^2 = 0 \rightarrow r = 3$ $a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$
 $a_0 = 1 = c_1$ $a_1 = 6 = 3c_1 + 3c_2 \rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow a_n = 3^n + n 3^n$

مثال) رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5(3^n) \\ a_0 = 2 \end{cases}$ را حل کنید

رابطه همی $a_n = 3a_{n-1}$ را در نظر بگیرید با $a_n = r^n$ داریم $r = 3$
 بنابراین $a_n^{(h)} = c(3^n)$ از جدول همی ۷ حالت اب با فرض $f(n) = 5(3^n)$ فراهم راست
 $a_n^{(p)} = An 3^n$ با جایگذاری در رابطه بازگشتی داریم
 $c(3^n) + An 3^n - 3c(3^{n-1}) - 3A(n-1)(3^{n-1}) = 5(3^n) \Rightarrow (c + An - c - A(n-1))3^n = 5(3^n)$
 $\rightarrow (An - An + A)3^n = 5(3^n) \Rightarrow A(3^n) = 5(3^n) \rightarrow A = 5$
 پس $a_n = 2(3^n) + 5n(3^n)$ $r = a = c(3^n) + 5n(3^n) \leftarrow c = 2$ در نتیجه